DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.008

一类退化 Kirchhoff 方程基态解的存在性①

刘婷婷，　商彦英

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了在 $\mathbb{R}^3$ 上的一类退化的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=|u|^{p-2}u & x\in\mathbb{R}^3 \\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\ u>0 & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

利用变分法及分析方法，得到了它的一个正的基态解.

关　键　词：Kirchhoff 方程；基态解；变分法；Pohozaev 等式

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)04-0054-07

本文研究如下退化的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=|u|^{p-2}u & x\in\mathbb{R}^3 \\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\ u>0 & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases}\tag{1}$$

其中 $b>0$，$2<p<6$. 我们假定位势函数 V 满足如下条件：

(V_1) $V(x)\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 满足 $(\nabla V(x),x)\in L^{\infty}(\mathbb{R}^3)\cup L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 和

$$\frac{p-2}{2}V(x)-(\nabla V(x),x)\geqslant 0\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^3$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的内积；

(V_2) 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^3$，$0<\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)\leqslant V(x)\leqslant\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=V_\infty<+\infty$；

(V_3) 存在 $\bar{c}>0$，使得

$$\bar{c}=\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x}$$

众所周知，对 Kirchhoff 方程的研究，通常假设非线性项的增长次数 $p\geqslant 4$. 而在本文中，我们只需假设 $p>2$. 方程(1)对应的非退化方程为

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=|u|^{p-2}u & x\in\mathbb{R}^3 \\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\ u>0 & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases}\tag{2}$$

其中 $a,b>0$. 方程(2)已被一些学者研究过[1-2]. 文献[2]考虑了 $3<p<6$ 的情形，文献[1]考虑了 $2<$

① 收稿日期：2015-09-17
基金项目：国家自然科学基金项目(11071267)；中央高校基本业务费专项基金项目(XD5K2016C119).
作者简介：刘婷婷(1991-)，女，重庆巴南人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：商彦英，副教授.

$p<6$ 的情形，文献[3]研究了退化 Kirchhoff 方程临界指数的情形. 受到文献[1-3]的启发，我们研究退化的 Kirchhoff 方程渐进常数的情况，即方程(1). 我们的主要结论如下：

定理 1 假设 $b>0$，$2<p<6$ 并且位势函数 V 满足条件$(V_1)-(V_3)$，那么方程(1)有一个正的基态解.

为了得到方程(1)的正解，我们考虑下面泛函的临界点：

$$I(u)=\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^p\mathrm{d}x$$

其中 $u^+=\max\{u,0\}$. 它的导泛函为

$$\langle I'(u),v\rangle=b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^{p-1}v\mathrm{d}x \qquad \forall v\in E$$

其中空间

$$E=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

具有范数

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

对 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，定义范数 $\|u\|_*=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. 明显地，范数 $\|\cdot\|_*$ 和 $\|\cdot\|$ 是等价的. 首先，我们研究下列自治的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases}-b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V_\infty u=\lambda|u|^{p-2}u & x\in\mathbb{R}^3\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\ u>0 & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{3}$$

其中 b,V_∞,λ 是正常数，并且 $2<p<6$. 方程(3)对应的泛函为 I_λ^∞，导泛函为 $I_\lambda^{\infty'}(u)$. 利用一种新的流形，我们得到如下结论：

定理 2 假设 b,V_∞,λ 是正常数，并且 $2<p<6$，那么方程(3)有一个正的基态解.

证明过程在约束极小化下完成，其中约束条件是一个结合 Nehari 流形与 Pohozaev 等式的一个流形，即：

$$M_\lambda^\infty=\{u\in E\backslash\{0\}:J_\lambda^\infty(u)=0\}$$

其中

$$J_\lambda^\infty(u)=\langle I_\lambda^{\infty'}(u),u\rangle+2\langle I_\lambda^{\infty'}(u),(x,\nabla u)\rangle=$$
$$2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+4\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda(p+6)}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x$$

定义 $m_\lambda^\infty=\inf\limits_{u\in M_\lambda^\infty}I_\lambda^\infty(u)$. 下面我们证明 m_λ^∞ 是可达的：

引理 1 假设 b,λ 是正常数，并且 $2<p<6$，那么：

(i) 存在 $\beta>0$，使得$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\geqslant\beta$ 对一切 $u\in M_\lambda^\infty$ 均成立；

(ii) $m_\lambda^\infty>0$.

证 (i) 对任意的 $u\in M_\lambda^\infty$，通过 Young 和 Sobolev 不等式，我们容易得到证明.

(ii) 根据(i)，对任意的 $u\in M_\lambda^\infty$，有

$$I_\lambda^\infty(u)=I_\lambda^\infty(u)-\frac{1}{p+6}J_\lambda^\infty(u)\geqslant C\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\geqslant C\beta^2$$

因此 $m_\lambda^\infty>0$.

引理 2 假设 b,λ 是正常数，且 $2<p<6$，则对 $\forall u\in E\backslash\{0\}$，存在唯一的 $t_u>0$，使得：

$$u_{t_u}=t_u u\left(\frac{x}{t_u^2}\right)\in M_\lambda^\infty \qquad I_\lambda^\infty(u_{t_u})=\max_{t>0}I_\lambda^\infty(u_t)$$

证　类似文献[2]中引理 2.5 的证明.

注 1　对 $\forall u \in M_\lambda^\infty$，$I_\lambda^\infty(u)=\max\limits_{t>0} I_\lambda^\infty(u_t)$.

引理 3　假设 b,λ 是正常数，且 $2<p<6$，则对任意 $0\leqslant u \in M_\lambda^\infty$，都存在 $0\leqslant \bar{u} \in M_\lambda^\infty \cap H_r^1(\mathbb{R}^3)$，使得 $I_\lambda^\infty(\bar{u})\leqslant I_\lambda^\infty(u)$，其中

$$H_r^1(\mathbb{R}^3)=\{u\in H^1(\mathbb{R}^3): u(x)=u(|x|)\}$$

证　对任意 $u\in M_\lambda^\infty$，根据文献[4]中定理 3.1.5，存在 $u^*\in H_r^1(\mathbb{R}^3)$，使得：

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^*|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u^*|^\theta\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}|u|^\theta\mathrm{d}x\qquad\forall\theta\in[2,6]$$

当 t 足够小时，$J_\lambda^\infty\left(u^*\left(\dfrac{x}{t}\right)\right)>0$. 当 $t>1$ 时，

$$J_\lambda^\infty\left(u^*\left(\frac{x}{t}\right)\right)<t^3J_\lambda^\infty(u)=0$$

因此，存在 $s\in(0,1]$，使得

$$J_\lambda^\infty\left(u^*\left(\frac{x}{s}\right)\right)=0$$

定义 $\bar{u}=u^*\left(\dfrac{\cdot}{s}\right)$，则 $\bar{u}\in M_\lambda^\infty\cap H_r^1(\mathbb{R}^3)$，且

$$I_\lambda^\infty(\bar{u})=I_\lambda^\infty(\bar{u})-\frac{1}{p+6}J_\lambda^\infty(\bar{u})\leqslant I_\lambda^\infty(u)-\frac{1}{p+6}J_\lambda^\infty(u)=I_\lambda^\infty(u)$$

引理 4　假设 b,λ 是正常数，且 $2<p<6$，则对任意 $u\in M_\lambda^\infty$，有 $J_\lambda^{\infty\prime}(u)\neq 0$.

证　(反证法)若存在 $u\in M_\lambda^\infty$，使得 $J_\lambda^{\infty\prime}(u)=0$，同时作用$(x,\nabla u)$后，有

$$2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2=0$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x=0$$

故 $u=0$，与引理 1(i) 矛盾.

引理 5　假设 b,λ 是正常数，且 $2<p<6$，若 $u\in M_\lambda^\infty$，$I_\lambda^\infty(u)=m_\lambda^\infty$，则 u 是 I_λ^∞ 在 E 上的临界点.

证　因为 $u\in M_\lambda^\infty$，$I_\lambda^\infty(u)=m_\lambda^\infty$，根据引理 4，利用 Lagrange 乘子法则，存在 $\mu\in\mathbb{R}$，使得 $I_\lambda^{\infty\prime}(u)=\mu J_\lambda^{\infty\prime}(u)$，即 u 是方程

$$I_\lambda^{\infty\prime}(u)=\mu\left[-8b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Delta u+8V_\infty u-\lambda(p+6)|u|^{p-2}u\right]$$

的解，所以

$$\mu\left[(2p-4)b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+(4p-8)\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u^2\mathrm{d}x\right]=0$$

因为 $p>2$ 且 $u\neq0$，所以 $\mu=0$. 因此 $I_\lambda^{\infty\prime}(u)=0$. 从而 u 是 $I_\lambda^{\infty\prime}$ 在 E 上的临界点.

定理 2 的证明　根据 m_λ^∞ 的定义，存在极小化序列 $\{u_n\}\subset M_\lambda^\infty$，使得 $I_\lambda^\infty(u_n)\to m_\lambda^\infty$. 由于 $\{|u_n|\}\subset M_\lambda^\infty$ 且 $I_\lambda^\infty(|u_n|)=I_\lambda^\infty(u_n)$，不妨假设 $u_n\geqslant0$. 根据引理 3，存在 $0\leqslant\bar{u}_n\in M_\lambda^\infty\cap H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 使得 $I_\lambda^\infty(\bar{u}_n)\leqslant I_\lambda^\infty(u_n)$. 当 n 足够大时，有

$$m_\lambda^\infty+1\geqslant I_\lambda^\infty(u_n)\geqslant I_\lambda^\infty(\bar{u}_n)\geqslant C\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{u}_n|^2\mathrm{d}x$$

结合 $\bar{u}_n\in M_\lambda^\infty$，我们有 $|\bar{u}_n|_2\leqslant C$，所以 $\|\bar{u}_n|\leqslant C$. 故存在 $0\leqslant u\in H_r^1(\mathbb{R}^3)$，使得：在 $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 中 $\bar{u}_n\rightharpoonup u$；在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中，对 $\forall s\in(2,6)$ 有 $\bar{u}_n\to u$；在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\bar{u}_n(x)\to u(x)$(a. e. $x\in\mathbb{R}^3$). 若 $u=0$，根据

$J_\lambda^\infty(\bar{u}_n)=0$，有

$$2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla \bar{u}_n|^2\mathrm{d}x\right)^2\leqslant \lim_{n\to\infty}\left[2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla \bar{u}_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+4\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty \bar{u}_n{}^2\mathrm{d}x\right]=\frac{\lambda(p+6)}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x=0$$

这与引理 1(i) 矛盾，故 $u\neq 0$. 由范数的弱下半连续性、Fatou 引理和注 1 知 $I_\lambda^\infty(u_t)\leqslant m_\lambda^\infty$. 由引理 2，存在 $t_u>0$，使得 $u_{t_u}\in M_\lambda^\infty$ 且 $m_\lambda^\infty\leqslant I_\lambda^\infty(u_{t_u})$. 所以 u_{t_u} 是 m_λ^∞ 的极小化序列. 根据引理 5，u_{t_u} 是方程(3) 的基态解. 显然 $u_{t_u}\geqslant 0$. 由强极大值原理，$u_{t_u}>0$，即 u_{t_u} 是方程(3) 的一个正基态解.

我们利用文献[5] 中的 Jeanjean 定理来证明定理 1. 令

$$X=E\qquad I_\lambda(u)=A(u)-\lambda B(u)$$

其中：

$$A(u)=\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x\qquad B(u)=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^p\mathrm{d}x$$

所以 $I_1(u)=I(u)$. 显然，对 $\forall u\in E$，有 $B(u)\geqslant 0$，并且当 $\|u\|\to+\infty$ 时，$A(u)\to+\infty$.

引理 6　假设条件$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_3)$ 成立. 若 $b>0$ 且 $2<p<6$，则存在 $\rho>0$，$\alpha>0$，使得

$$I_\lambda(u)|_{\|u\|=\rho}\geqslant\alpha\qquad \lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

证　根据 Sobolev 不等式和 Young 不等式，对一切 $u\in E$，有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)\geqslant&\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\mathrm{d}x-C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^3\geqslant\\&\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2\left(1-C\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

引理 7　假设条件$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_3)$ 成立，并且 $b>0$，$2<p<6$. 则：

(i) 对 $\forall\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\rho>0$，存在 $v_2\in E$ 且 $\|v_2\|>\rho$，使得 $I_\lambda(v_2)<0$；

(ii) 对 $\forall\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，有

$$c_\lambda=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I_\lambda(\gamma(t))>\max\{I_\lambda(0),I_\lambda(v_2)\}$$

其中

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=0,\gamma(1)=v_2\}$$

证　(i) 对任意 $0<u\in E$，定义 $u_t=tu\left(\frac{x}{t^2}\right)$，$t>0$. 那么我们有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u_t)=&\frac{bt^8}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{t^8}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(t^2x)\,u^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda t^{p+6}}{p}\int_{\mathbb{R}^3}u^p\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{bt^8}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{t^8}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u^2\mathrm{d}x-\frac{t^{p+6}}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}u^p\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $p>2$，所以当 $t\to+\infty$ 时，$I_\lambda(u_t)\to-\infty$. 因此存在 $t_0>0$，使得 $\|u_{t_0}\|>\rho$，并且对 $\forall\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$I_\lambda(u_{t_0})<0$. 令 $v_2=u_{t_0}$，则 (i) 成立.

(ii) 根据 (i)、引理 6 和 c_λ 的定义，有 $c_{\frac{1}{2}}\geqslant c_\lambda\geqslant c_1\geqslant\alpha>0$. 又因为 $I_\lambda(0)=0$ 和 $I_\lambda(v_2)<0$，则 (ii) 成立.

引理 8　假设条件$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_3)$ 成立，当 $b>0$ 且 $2<p<6$ 时，对 $\forall\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$m_\lambda^\infty>c_\lambda$.

证　设 $0<u_\lambda^\infty\in E$ 是 m_λ^∞ 的极小化序列. 类似引理 7 的证明，存在 $t_0>0$ 使得 $I_\lambda\left(t_0u_\lambda^\infty\left(\frac{x}{t_0^2}\right)\right)<0$.

定义

$$\gamma(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ tt_0u_\lambda^\infty\left(\dfrac{x}{(tt_0)^2}\right) & t\in(0,1]\end{cases}$$

则 $\gamma(t)$ 在$[0,1]$上连续. 通过计算知 $\gamma\in\Gamma$. 由条件(V_2)，对 $\forall\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，有

$$\begin{aligned}m_\lambda^\infty=I_\lambda^\infty(u_\lambda^\infty)=\max_{t>0}I_\lambda^\infty\left(tu_\lambda^\infty\left(\frac{x}{t^2}\right)\right)>\\ \max_{t>0}I_\lambda\left(tu_\lambda^\infty\left(\frac{x}{t^2}\right)\right)\geqslant\max_{t\in(0,1]}I_\lambda\left(tt_0u_\lambda^\infty\left(\frac{x}{(tt_0)^2}\right)\right)=\\ \max_{t\in[0,1]}I_\lambda(\gamma(t))\geqslant c_\lambda\end{aligned}$$

引理 9　假设条件$(V_1)-(V_3)$成立，$\{u_n\}\subset E$ 是 I_λ 的非负有界$(PS)_{c_\lambda}$ 序列. 当 $b>0$，$2<p<6$ 时，存在 $0\leqslant u\in E$，使得在 E 中有 $u_n\to u$.

证　根据文献[2]中的引理 3.4，我们只需证 $l=0$. 若 $l\geqslant1$，因为 $\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j)=0$，所以：

$$\langle\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j),v_j\rangle=0\qquad\langle\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j),(x,\nabla v_j)\rangle=0$$

又因为

$$d=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_j|^2\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}0=\langle\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j),v_j\rangle+2\langle\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j),(x,\nabla v_j)\rangle\geqslant\\ 2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_j|^2\mathrm{d}x\right)^2+4\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty v_j^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda(p+6)}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|v_j|^p\mathrm{d}x=J_\lambda^\infty(v_j)\end{aligned}$$

故存在 $t_j\in(0,1]$，使得

$$t_jv_j\left(\frac{x}{t_j^2}\right)\in M_\lambda^\infty$$

又因为

$$d=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_j|^2\mathrm{d}x$$

有

$$m_\lambda^\infty+\frac{bd}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_j|^2\mathrm{d}x\leqslant\zeta_\lambda^\infty(v_j)-\frac{\langle\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j),v_j\rangle+2\langle\zeta_\lambda^{\infty'}(v_j),(x,\nabla v_j)\rangle}{p+6}=\zeta_\lambda^\infty(v_j)$$

又因为条件(V_1)，所以

$$\zeta_\lambda(u)\geqslant\frac{bd}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}c_\lambda+\frac{bd^2}{4}=\zeta_\lambda(u)+\sum_{j=1}^{l}\zeta_\lambda^\infty(v_j)\geqslant\\ \frac{bd}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+lm_\lambda^\infty+\frac{bd}{4}\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_j|^2\mathrm{d}x=\\ lm_\lambda^\infty+\frac{bd^2}{4}\geqslant m_\lambda^\infty+\frac{bd^2}{4}\end{aligned}$$

这与引理 8 矛盾，故 $l=0$.

引理 10　假设条件$(V_1)-(V_3)$成立. 若 $b>0$ 且 $2<p<6$，对 $\forall\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，泛函 $I(u)$ 在 E 中有非负临界点.

证 根据Jeanjean定理、引理6和引理7，对 $\forall\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$I_\lambda$ 在 E 中存在一个有界的$(\mathrm{PS})_{c_\lambda}$ 序列. 定义 $u^-=\max\{-u,0\}$，通过计算知，在 E 中 $u_n^-\to 0$，并且：

$$c_\lambda=I_\lambda(u_n)+o(1)=I_\lambda(u_n^+)+o(1)$$

$$0=\langle I'_\lambda(u_n),\varphi\rangle+o(1)=\langle I'_\lambda(u_n^+),\varphi\rangle+o(1)$$

对 $\varphi\in E$，$\|\varphi\|=1$ 一致成立. 因此我们可以假设 $u_n\geqslant 0$. 根据引理9，在子列的意义下，存在 $0\leqslant u\in E$，使得在 E 中 $u_n\to u$. 从而 $I_\lambda(u_n)\to I_\lambda(u)=c_\lambda$，且在 E^* 中 $I'_\lambda(u_n)\to I'_\lambda(u)=0$.

定理1的证明 由引理10，对 $\forall\lambda_j\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，存在非负的 $u_j\in E$，使得 $\lambda_j\to 1^-$，$I_{\lambda_j}(u_j)=c_{\lambda_j}$ 并且 $I'_{\lambda_j}(u_j)=0$. 所以：

$$\langle I'_{\lambda_j}(u_j),u_j\rangle=0\qquad\langle I'_{\lambda_j}(u_j),(x,\nabla u_j)\rangle=0$$

定义：

$$A=b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_j|^2\mathrm{d}x\right)^2$$

$$B=\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_j^2\mathrm{d}x\qquad C=\lambda_j\int_{\mathbb{R}^3}u_j^p\mathrm{d}x$$

则我们有

$$\begin{cases}A+B-C=0\\ \dfrac{A}{2}+\dfrac{3B}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla V(x),x)u_j^2\mathrm{d}x-\dfrac{3}{p}C=0\end{cases}$$

又因为条件(V_1)成立，所以

$$\begin{aligned}&c_{\lambda_j}=I_{\lambda_j}(u_j)=\\&\quad\frac{A}{4}+\frac{B}{2}-\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{4p-6}(A+B)-\frac{1}{p}\cdot\frac{3p-6}{4p-6}\cdot\frac{p}{3}\left[\frac{A}{2}+\frac{3B}{2}+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla V(x),x)u_j^2\mathrm{d}x\right]=\\&\quad\frac{(p-2)b}{4(p+6)}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_j|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{p-2}{2(p+6)}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_j^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+6}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla V(x),x)u_j^2\mathrm{d}x\geqslant\\&\quad\frac{(p-2)b}{4(p+6)}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_j|^2\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

即存在 $C>0$，使得 $\|u_j\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\leqslant C$. 由

$$\langle I'_{\lambda_j}(u_j),u_j\rangle=0$$

结合Young不等式和Sobolev不等式，有

$$C\int_{\mathbb{R}^3}u_j^2\mathrm{d}x\leqslant b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_j|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_j^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}u_j^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u_j^2\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^3}u_j^6\mathrm{d}x$$

因为$\frac{6-p}{4}<1$，所以$\{u_j\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中有界，且$\{u_j\}$ 在 E 中有界. 因为

$$I(u_j)=I_{\lambda_j}(u_j)+o(1)=c_{\lambda_j}+o(1)=c+o(1)$$

且在 E^* 中有

$$I'(u_j)=I'_{\lambda_j}(u_j)+o(1)=o(1)$$

由引理10，存在 $0\leqslant u\in E$，使得在 E 中 $u_j\to u$，因此 $I(u_j)\to I(u)=c$，且在 E^* 中有 $I'(u_j)\to I'(u)=0$，所以 u 是方程(1)的非负解. 为了得到方程(1)的基态解，令

$$\pi=\inf_{u\in\prod}I(u)$$

其中

$$\prod=\{u\in E\backslash\{0\}:I'(u)=0,u\geqslant 0\}$$

因为 $\prod \neq \emptyset$，则存在 $0 \leqslant u_n \in E$，使得 $I'(u_n) = 0$ 和 $I(u_n) \to \pi$. 类似地，$\{u_n\}$ 有界. 由引理 9，存在 $0 \leqslant u \in E$ 使得 $u_n \to u$，则：

$$I(u_n) \to I(u) = \pi \qquad I'(u_n) \to I'(u) = 0$$

由强极大值原理，有 $u > 0$.

参考文献：

[1] LIU Z S，GUO S J. Existence of Positive Ground State Solutions for Kirchhoff Type Problems [J]. Nonlinear Anal，2015，120：1－13.

[2] LI G B，YE H Y. Existence of Positive Ground State Solutions for the Nonlinear Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^3$ [J]. J Differential Equations 2013，257(2)：566－600.

[3] XIE Q L，WU X P，TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Type Problem with Critical Exponent [J]. Communications on Pure and Applied Anylisis，2013，12(6)：2773－2786.

[4] LIONS P L. The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case，Part I [J]. Analyse Nonlinéaire，1984，1(2)：109－145.

[5] JEANJEAN L，TANAKA K. A Positive Solution for a Nonlinear Schrödinger Equation on $\mathbb{R}^N$ [J]. Indiana Univ Math，2005，54(2)：443－464.

[6] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60－63.

Positive Ground State Solutions for Degenerate Kirchhoff-Type Equation

LIU Ting-ting，　SHANG Yan-ying

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，using the variational methods，we deal with the existence of positive state solutions for Degenerate Kirchhoff-type problem with nonlinear team in $\mathbb{R}^3$：

$$\begin{cases} -\left(b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u + V(x)u = |u|^{p-2}u & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3),\ u > 0 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Key words：Kirchhoff-type equation；state solutions；variational method；Pohozaev equality

责任编辑　廖　坤