第 36 卷第 12 期 西 南 大 学 学 报(自然科学版) 2014年12月
Vol. 36 No. 12 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Dec. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.12.015

锥超度量空间的不动点定理[①]

李 健， 邓 磊

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在锥超度量空间中证明了一些基本的性质，并利用锥超度量空间球完备性证明了两个不动点定理，改进和推广了锥超度量空间中的不动点理论的某些结论.

关 键 词：锥超度量空间；球完备；不动点

中图分类号：O177.91 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2014)12-0077-05

度量空间中的不动点理论是非线性泛函分析的重要组成部分. 20 世纪 20 年代，波兰数学家 Banach 提出并证明了著名的 Banach 压缩映象定理. 此后，许多学者提出了一系列新型的压缩映象概念及新型的压缩映象不动点定理，其中很多结果已经被成功地应用于研究非线性积分方程、微分方程、泛函微分方程解的存在唯一性. 2007 年，文献[1]用抽象的 Banach 空间取代实数空间首次定义了锥度量空间，同时在锥度量空间上给出了序列收敛和空间完备的定义，并在此基础上，把著名的压缩映象原理推广到了抽象的锥度量空间，获得了一系列新的不动点定理. 目前，国内外数学家又将锥度量空间的不动点理论发展到了两个甚至更多的公共不动点理论. 锥度量空间上更多的不动点理论可见文献[2-6].

Banach 压缩映象定理最初被广泛地应用于具体的度量空间中，自从文献[1]将其推广到锥上以后，人们研究的视野更加广阔，希望把更多的理论抽象化，这样可以得出更一般的结论，应用也更广泛更有价值. 2012 年，文献[7]在超度量空间与超凸度量空间上证明了一些不动点定理，进一步发展了超度量空间的不动点理论. 2013 年，文献[8]引入了锥超度量空间，定义了锥超度量空间中球完备的概念，并在球完备的锥超度量空间上证明了收缩映像的不动点定理. 本文在锥超度量空间上利用球完备与锥超度量空间性质证明了两个不动点定理，推广了文献[8]的收缩映像.

1 预备知识

锥度量空间的定义及其例子可参见文献[1]，下面介绍锥超度量空间的概念.

定义 1[8] 设 X 是一非空集合，E 是一实 Banach 空间. 设映射 $d: X\times X \longrightarrow E$ 满足以下条件：

(i) $0 \leq d(x, y)$，$d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$ $(\forall x, y \in X)$；

(ii) $d(x, y)=d(y, x)$ $(\forall x, y \in X)$；

(iii) $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$ $(\forall x, y, z \in X)$.

则 d 称为 X 的一个锥超度量，(X, d) 称为一个锥超度量空间.

例 1[8] 在定义 1 中，令 $E=\mathbb{R}$，$P=[0, +\infty)$，$X=\mathbb{R}$ 且 $d: X\times X \longrightarrow E$ 满足

① 收稿日期：2014-02-26

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11226228)；河南省教育厅自然科学研究项目(2011B110025).

作者简介：李 健(1990-)，男，四川绵阳人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

则(X,d)称为一个锥超度量空间.

定义 2[8] 若 X 中的每一收缩球集都有非空的交，则锥超度量空间(X,d)称为球完备的.

性质 1 令(X,d)为一个锥超度量空间，$B(x;\alpha)$表示以 x 为中心，α 为半径的闭球. 若$\alpha\leq\beta$，$B(x;\alpha)\cap B(y;\beta)\neq\varnothing$，则 $B(x;\alpha)\subseteq B(y;\beta)$. 而且若 $\alpha=d(x,y)$，则 $B(x;\alpha)=B(y;\alpha)$.

证 若 $x=y$，则 $B(x;\alpha)\subseteq B(y;\beta)$ 显然成立.

若 $x\neq y$，则任取 $x_0\in B(x;\alpha)$，有 $d(x,x_0)\leq\alpha$ 成立. 只需证明 $x_0\in B(y;\beta)$ 即可，即证明

$$d(x_0,y)\leq\beta$$

因为

$$d(x_0,y)\leq\max\{d(x_0,x),d(x,y)\}\leq\max\{\beta,d(x,y)\}$$

$$B(x;\alpha)\cap B(y;\beta)\neq\varnothing$$

不妨设

$$z\in B(x;\alpha)\cap B(y;\beta)$$

则由 $z\in B(x;\alpha)$ 知 $d(x,z)\leq\alpha$.

同理知 $d(y,z)\leq\beta$，则

$$d(x,y)\leq\max\{d(x,z),d(y,z)\}\leq\max\{\alpha,\beta\}$$

所以

$$d(x_0,y)\leq\max\{\alpha,\beta\}=\beta$$

即 $x_0\in B(y;\beta)$. 由 x_0 的任意性知 $B(x;\alpha)\subseteq B(y;\beta)$. 综上所述，$B(x;\alpha)\subseteq B(y;\beta)$.

显然，当 $\alpha=d(x,y)$ 时，$B(x;\alpha)=B(y;\alpha)$.

2 主要结论

定理 1 设(X,d)为一个球完备锥超度量空间，映射 $T:X\longrightarrow X$ 满足条件

$$d(T(x),T(y))\prec ad(x,y)+bd(x,T(x))+cd(y,T(y))$$

其中 $a+b+c<1$，$a,b,c\geqslant 0$. 则 T 在 X 上有唯一不动点.

证 令

$$B_x=B[x;d(x,T(x))]=\{y\mid d(x,y)\leq d(x,T(x)),\ y\in X\}$$

定义为以 x 为中心，$d(x,T(x))$ 为半径的闭球.

假设对 $\forall x\in X$ 都有 $T(x)\neq x$，则 $B=\{B_x\mid x\in X\}$ 为 X 的一个有序包含. 由 Hausdorff 极大原理(对任何偏序集中的任何一条链，都存在这个偏序集中的一条极大链包含这条链)，不妨令 $\mathcal{L}$ 为 B 的一个极大链. 由于 $T(x)\subseteq X$，则对 $\forall x\in X$ 都有 $B_x\cap X\neq\varnothing$.

因(X,d)为球完备锥超度量空间，则由定义 2 知，存在 $x_0\in X$，使得 $x_0\in\bigcap\mathcal{L}$. 显然，$B_{x_0}=\min\mathcal{L}$. 任取 $B_x\in\mathcal{L}$，则 $x_0\in B_x$. 因 $x_0\in B_x$，则有

$$d(x,x_0)\leq d(x,T(x))$$

又由

$$d(x,x_0)\leq d(x,T(x))$$

可推出

$$d(x_0,T(x_0))\prec d(x,T(x))$$

事实上，

$$\begin{aligned}d(x_0,T(x_0))\leq{}&\max\{d(x_0,x),d(x,T(x_0))\}\leq\\&\max\{d(x_0,x),\max\{d(x,T(x)),d(T(x),T(x_0))\}\}\leq\end{aligned}$$

$$\max\{d(x, T(x)), d(T(x), T(x_0))\} \prec$$
$$\max\{d(x, T(x)), ad(x, x_0)+bd(x, T(x))+cd(x_0, T(x_0))\} \prec$$
$$\max\{d(x, T(x)), (a+b)d(x, T(x))+cd(x_0, T(x_0))\}$$

若

$$(a+b)d(x, T(x))+cd(x_0, T(x_0)) \preceq d(x, T(x))$$

则 $d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$.

若

$$d(x, T(x)) \preceq (a+b)d(x, T(x))+cd(x_0, T(x_0))$$

由“$\preceq$”与线性结构的相容性知

$$d(x_0, T(x_0)) \preceq (a+b)d(x, T(x))+cd(x_0, T(x_0))$$
$$(1-c)d(x_0, T(x_0)) \preceq (a+b)d(x, T(x))$$
$$d(x_0, T(x_0)) \preceq \frac{a+b}{1-c}d(x, T(x))$$

又因 $a+b+c<1$，则$\frac{a+b}{1-c}<1$，即

$$d(x_0, Tx_0) \prec d(x, T(x))$$

综上所述，由 $d(x, x_0) \preceq d(x, T(x))$ 可推出

$$d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$$

因为

$$d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x)) \qquad B_{x_0} \cap B_x \neq \varnothing$$

由性质 1 知 $B_{x_0} \subseteq B_x$.

因为 $T(x) \subseteq X$，则 $T(x_0) \in X$. 则存在 $x_0' \in X$，使得 $x_0' = T(x_0) \neq x_0$. 则由已知条件知

$$d(T(x_0'), x_0') = d(T(x_0'), T(x_0)) \prec ad(x_0', x_0)+bd(x_0', T(x_0'))+cd(x_0, T(x_0))$$

即

$$d(T(x_0'), T(x_0)) \prec ad(x_0', x_0)+bd(T(x_0), T(x_0'))+cd(x_0, T(x_0))$$
$$(1-b)d(T(x_0'), T(x_0)) \prec (a+c)d(x_0', x_0)$$
$$d(T(x_0'), T(x_0)) \prec \frac{a+c}{1-b}d(x_0', x_0) \prec d(x_0', x_0)$$

则有

$$d(T(x_0'), x_0') \prec d(x_0, T(x_0))$$

又由

$$d(T(x_0'), x_0') \prec d(x_0, T(x_0)) \qquad x_0' \in B_{x_0} \cap B_{x_0'}$$

知 $B_{x_0'} \subseteq B_{x_0}$. 而 $x_0 \in B_{x_0}$，$x_0 \notin B_{x_0'}$. 则 $B_{x_0'}$ 为 B_{x_0} 的真子集. 由前面的证明知 $B_{x_0} = \min \mathcal{L}$，而 $B_{x_0'}$ 为 B_{x_0} 的真子集，这与极大链的性质相矛盾，故假设不成立. 则存在 $x_0 \in X$，使 $Tx_0 = x_0$，唯一性显然.

注 1 定理 1 中，$a<1$，$b=c=0$ 时，$d(Tx, Ty) \prec ad(x, y) \prec d(x, y)$，即为文献[8] 中的定理 2.5，所以定理 1 进一步推广了文献[8] 的收缩映像.

定理 2 (X, d) 为一个球完备锥超度量空间，映射 $T: X \longrightarrow X$ 满足条件

$$d(T(x), T(y)) \prec ad(x, y)+bd(x, T(y))+cd(y, T(x))$$

其中 $a+b+c<1$，$a,b,c \geqslant 0$. 则 T 在 X 上有唯一不动点.

证 定理 2 和定理 1 的前半部分证明相同，关键证明由 $d(x, x_0) \preceq d(x, T(x))$ 是否可推出

$$d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$$

事实上，若 $d(x_0, T(x_0)) \preceq d(x, x_0)$，则 $d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$；若 $d(x, x_0) \prec d(x_0,$

$T(x_0))$，则

$$\begin{aligned} d(x_0, T(x_0)) \preceq \max\{d(x_0, x), d(x, T(x_0))\} \preceq \\ \max\{d(x_0, x), \max\{d(x, T(x)), d(T(x), T(x_0))\}\} \preceq \\ \max\{d(x, T(x)), d(T(x), T(x_0))\} \prec \\ \max\{d(x, T(x)), ad(x, x_0) + bd(x, T(x_0)) + cd(x_0, T(x))\} \prec \\ \max\{d(x, T(x)), ad(x, x_0) + b\max\{d(x, x_0), d(x_0, T(x_0)\} + \\ c\max\{d(x_0, x), d(x, T(x))\}\} = \\ \max\{d(x, T(x)), ad(x, x_0) + bd(x_0, T(x_0) + cd(x, T(x))\} = \\ \max\{d(x, T(x)), (a+c)d(x, T(x)) + bd(x_0, T(x_0))\} \end{aligned}$$

若

$$(a+c)d(x, T(x)) + bd(x_0, T(x_0)) \preceq d(x, T(x))$$

则 $d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$ 成立.

若

$$d(x, T(x)) \preceq (a+c)d(x, T(x)) + bd(x_0, T(x_0))$$

由“$\preceq$”与线性结构的相容性知

$$d(x_0, T(x_0)) \preceq (a+c)d(x, T(x)) + bd(x_0, T(x_0))$$

$$(1-b)d(x_0, T(x_0)) \preceq (a+c)d(x, T(x))$$

$$d(x_0, T(x_0)) \preceq \frac{a+c}{1-b}d(x, T(x))$$

又因 $a+b+c<1$，则$\frac{a+c}{1-b}<1$，即

$$d(x_0, Tx_0) \prec d(x, T(x))$$

综上所述，由 $d(x, x_0) \preceq d(x, T(x))$ 可推出 $d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$.

因为 $d(x_0, T(x_0)) \prec d(x, T(x))$ 与 $B_{x_0} \cap B_x \neq \emptyset$，由性质1知 $B_{x_0} \subseteq B_x$.

因为 $T(x) \subseteq X$，则 $T(x_0) \in X$. 因此存在 $x'_0 \in X$，使 $x'_0 = T(x_0) \neq x_0$. 则由已知条件知

$$d(T(x'_0), x'_0) = d(T(x'_0), T(x_0)) \prec ad(x'_0, x_0) + bd(x'_0, T(x_0)) + cd(x_0, T(x'_0))$$

即

$$d(T(x'_0), T(x_0)) \prec ad(x'_0, x_0) + cd(x_0, T(x'_0))$$

$$d(T(x'_0), T(x_0)) \prec ad(x'_0, x_0) + c\max\{d(x_0, T(x_0)), d(T(x_0), T(x'_0))\}$$

若

$$d(x_0, T(x_0)) \prec d(T(x'_0), T(x_0))$$

则

$$d(T(x'_0), T(x_0)) \prec ad(x'_0, x_0) + cd(T(x_0), T(x'_0))$$

即

$$(1-c)d(T(x'_0), T(x_0)) \prec ad(x'_0, x_0) \qquad a+b+c<1$$

矛盾.

若

$$d(T(x'_0), T(x_0)) \preceq d(x_0, T(x_0))$$

则

$$d(T(x'_0), T(x_0)) \prec ad(x'_0, x_0) + cd(x_0, T(x_0))$$

即

$$d(T(x_0'), T(x_0)) \prec (a+c)d(x_0, T(x_0)) \prec d(x_0, T(x_0))$$

则

$$d(T(x_0'), T(x_0)) \prec d(x_0, T(x_0))$$

又由

$$d(T(x_0'), x_0') \prec d(x_0, T(x_0)) \qquad x_0' \in B_{x_0} \cap B_{x_0'}$$

知 $B_{x_0'} \subseteq B_{x_0}$. 而 $x_0 \in B_{x_0}$，$x_0 \notin B_{x_0'}$，则 $B_{x_0'}$ 为 B_{x_0} 的真子集. 由前面证明知 $B_{x_0} = \min \mathcal{L}$. 而 $B_{x_0'}$ 为 B_{x_0} 的真子集，这与极大链的性质相矛盾，故假设不成立，即存在 $x_0 \in X$，使 $Tx_0 = x_0$. 唯一性显然.

注 2　定理 2 中，$a<1$，$b=c=0$ 时，$d(Tx, Ty) \prec ad(x, y) \prec d(x, y)$，即为文献[8]中的定理 2.5，所以定理 2 进一步推广了文献[8]的收缩映像.

参考文献：

[1] HUANG Long-guang，ZHANG Xian. Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings [J]. Math Anal，2007，332(4)：1468－1476.

[2] VETRO P. Common Fixed Points in Cone Metric Spaces [J]. Rendiconti Del Circolo Matematico di Palermo，2007，56(6)：464－468.

[3] ABBAS M，JUNGCK G. Common Fixed Points for Maps on Cone Metric Space [J]. Math Anal Appl，2007，341(2)：876－882.

[4] RADENOVIC S，RHOADES B E. Fixed Point Theorem for Two Non-Self Mappings in Cone Metric Space [J]. Computers and Mathematics with Applications，2009，57(12)：1701－1707.

[5] ABBAS M，RHOADES B E. Fixed and Periodic Point Results in Cone Metric Spaces [J]. Applied Mathematics Letters，2009，22(4)：511－515.

[6] REZAPOUR S H，HAMLBARANI R. Some Note on the Paper Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings [J]. J Math Anal Appl，2008，345(14)：719－724.

[7] KIRK W A，SHAHZAD N. Some Fixed Point Results in Ultrametric Spaces [J]. Topolgy and its Applications，2012，159(15)：3327－3334.

[8] 王丹萍，刘玉波. 锥超度量空间的不动点理论 [J]. 应用泛函分析学报，2013，15(1)：38－41.

[9] 刘奇飞. 凸度量空间中非扩张映象的不动点迭代 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(8)：120－122.

[10] 刘建军，邓　磊. 凸度量空间中非扩张映象的不动点迭代 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2005，30(6)：945－951.

On the Fixed Point Theorem in Cone Ultrametric Spaces

LI　Jian，　DENG　Lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we utilize the spherical completeness and cone ultrametrics，which belong to cone ultrametric space，to prove the fixed point theorem，and extend and improve some conclusions about the cone ultrametric space.

Key words：cone ultrametric space；spherically complete；fixed point

责任编辑　廖　坤