DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.12.014

位移算子的子空间亚超循环性①

刘梦琳，　舒永录

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要：利用超循环算子研究的方法，给出了一个判定亚超循环算子的充分条件，并且讨论了位移算子和加权位移算子的子空间亚超循环性性质.

关　键　词：位移算子；亚超循环算子；子空间亚超循环性

中图分类号：O177.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)12-0072-05

用 X 表示无限维可分的 Bannch 空间，$B(X)$ 表示有界线性算子全体的集合. $T \in B(X)$ 称为超循环的，如果存在 $x \in X$，使得集合

$$\mathrm{Orb}(x, T) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$$

在 X 中稠密. 称 T 为亚超循环的，如果存在 $x \in X$，使得集合

$$\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(x, T) = \{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$$

在 X 中稠密. 关于算子的超循环性和亚超循环性的研究详见文献[1-6].

文献[7] 证明了：如果 $x \in X$ 的轨道

$$\mathrm{Orb}(x, T) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$$

在 X 中某处稠密，则 x 关于 T 的轨道在 X 的每处都稠密. 这个结果促使了子空间超循环算子的概念的提出. 对 X 的非零子空间 M，如果存在 $x \in X$，使得 $\mathrm{Orb}(x, T) \cap M$ 在 M 中稠密，则称 T 为关于 M 的子空间超循环算子. 关于算子的子空间超循环性的研究见文献[8-11]. 子空间超循环算子的研究取得大量结果之后，文献[12] 提出了子空间亚超循环算子的概念：设 M 为 X 的非零子空间，称 T 为关于 M 的亚超循环算子，如果存在 $x \in X$，使得 $\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(x, T) \cap M$ 在 M 中稠密. 关于算子的子空间亚超循环性，文献[12] 给出了子空间亚超循环准则，并说明了子空间亚超循环性并不是无限维现象.

位移算子是一类常见的循环算子，在算子理论的研究中起着非常重要的作用. 对任意的

$$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in X$$

若有 $Bx = (x_2, x_3, \cdots)$，则称 B 是 X 的左移算子. B 的共轭算子称为右移算子，记作 S. 用 B_W 表示 $l^2(\mathbb{N})$ 上的加权左移算子，其定义如下：

$$B_W(\boldsymbol{e}_0) = 0 \qquad B_W = w_n \boldsymbol{e}_{n-1} \qquad n \geqslant 1$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $l^2(\mathbb{N})$ 的标准正交基，记 $W = \{w_n\}_{n \geqslant 1}$. 更多关于位移算子的(亚)超循环性的研究可以参考文献[13-15].

① 收稿日期：2014-02-17
基金项目：重庆市自然科学基金项目(cstc2013jjB0050).
作者简介：刘梦琳(1990-)，女，重庆巫溪人，硕士研究生，主要从事泛函分析的研究.

1 亚超循环算子的一个判定定理

受文献[6]的定理 3.3 的启发，给出亚超循环算子的一个判定定理(定理 1). 这个定理告诉我们：给定一个亚超循环算子，能构造出一系列的亚超循环算子.

定理 1 设 $T: X \longrightarrow X$ 是亚超循环算子，$U: X \longrightarrow Y$ 是可逆算子，则 $UTU^{-1}: Y \longrightarrow Y$ 是亚超循环的.

证 任取 T 的一个亚超循环量 $x \in X$，我们需要证明 $Ux \in Y$ 是 UTU^{-1} 的亚超循环量. 由定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(UTU^{-1}, Ux) = &\{\lambda (UTU^{-1})^n (Ux): \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} = \\ &\{\lambda UT^n U^{-1}(Ux): \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} = \\ &\{\lambda UT^n x: \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} = \\ &U\{\lambda T^n x: \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} = \\ &U(\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x))\end{aligned}$$

于是我们只需要证明

$$\overline{U(\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x))} = Y$$

由 $T \in B(X)$，对 X 的每一个子集 M，我们有

$$T(\overline{M}) \subseteq \overline{T(M)}$$

因为 T 是亚超循环算子，于是有

$$\overline{\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x)} = X$$

所以

$$U(X) = U(\overline{\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x)}) \subseteq \overline{U(\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x))} \subseteq Y$$

另一方面，由于 U 是具有稠密值域的，所以

$$Y = \overline{U(X)} \subseteq \overline{U(\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x))} \subseteq Y$$

因此

$$\overline{U(\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(T, x))} = Y$$

从而

$$\overline{\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(UTU^{-1}, Ux)} = Y$$

即 UTU^{-1} 是亚超循环算子.

2 子空间亚超循环算子的具体例子以及性质

文献[8]研究了子空间超循环算子，下面我们利用文献[8]中的例 3.8 的思想研究 B_W 的子空间亚超循环问题.

定理 2 设 B_W 是 $l^2(\mathbb{N})$ 中的加权左移算子，$W = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界递增的正项数列，并且 $|w_1| > 1$. 令

$$M = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2: a_n = 0, n < m\}$$

则 B_W 是 M 的子空间亚超循环算子.

证 首先，对于只有有限项非零的序列 $y = \{y_j\}_{j=0}^{\infty}$，定义它的长度为

$$|y| = \min\{m \in \mathbb{N}: y_n = 0, \forall n \geqslant m\}$$

取 M 的子集，记作 $\{f_j\}$，它由至多有限项非零的序列构成，于是 $\{f_j\}$ 是 M 的稠密子集. 我们按如下方式定义一个递增的整数列：$k_0 = 0$，对 $\forall j \geqslant 1$，k_j 满足

$$\frac{\| f_j \|}{w_1 w_2 \cdots w_{k_j - k_{j-1}}} \leqslant \frac{1}{w_1^j}$$

并且 $k_j > k_{j-1} + |f_{j-1}|$. 设

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} S_W^{k_j} f_j$$

其中 S_W 是 $l^2(\mathbb{N})$ 上的加权右移算子，

$$S_W(\boldsymbol{e}_n) = w_{n+1}^{-1} \boldsymbol{e}_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

下面证明 $f \in l^2$. 令

$$f_j = (f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}, \cdots)$$

根据算子 S_W 的定义得到

$$S_W^{k_j} f_j = \left(\underbrace{0, \cdots, 0}_{k_j 个}, \frac{f_{1j}}{w_1 w_2 \cdots w_{k_j}}, \frac{f_{2j}}{w_2 w_3 \cdots w_{k_j+1}}, \cdots, \frac{f_{lj}}{w_l w_{l+1} \cdots w_{k_j+l-1}}, \cdots\right)$$

从而

$$\| S_W^{k_j} f_j \|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|f_{lj}|^2}{|w_l w_{l+1} \cdots w_{k_j+l-1}|^2} \leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|f_{lj}|^2}{|w_1 w_2 \cdots w_{k_j}|^2} = \frac{\| f_j \|^2}{(w_1 w_2 \cdots w_{k_j})^2} \leqslant$$

$$\frac{\| f_j \|^2}{(w_1 w_2 \cdot \cdots \cdot w_{k_j - k_{j-1}})^2} \leqslant \frac{1}{w_1^{2j}}$$

所以

$$\| S_W^{k_j} f_j \| \leqslant \frac{1}{w_1^j}$$

又因为级数 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{w_1^j}$ 是收敛的(由 $|w_1| > 1$)，因此 $f \in l^2$. 设 $n \in \mathbb{N}$, 因为对所有 j，都有

$$k_j > k_{j-1} + |f_{j-1}|$$

所以，当 $n \geqslant j+1$ 时，我们有

$$k_n \geqslant k_{j+1} \geqslant k_j + |f_j|$$

因此 $\forall \lambda \in \mathbb{N}$, 都有 $\lambda B_W^{k_n} S_W^{k_j} f_j = 0$.

当 $n = j$ 时，$\lambda B_W^{k_n} S_W^{k_j} f_n \in l^2$，$\lambda B_W^{k_n} f \in M$. 因为 $B_W S_W = I$，于是

$$\| \lambda B_W^{k_n} f - f_n \|^2 = \| \lambda f_n + \lambda \sum_{j=n+1}^{\infty} B_W^{k_n} S_W^{k_j} f_j - f_n \|^2 =$$

$$\| \lambda \sum_{j=n+1}^{\infty} S_W^{k_j - k_n} f_j + (\lambda - 1) f_n \|^2 \leqslant$$

$$|\lambda|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \| S_W^{k_j - k_n} f_j \|^2 + |\lambda - 1|^2 \| f_n \|^2 =$$

$$|\lambda|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|f_{lj}|^2}{|w_l w_{l+1} \cdots w_{k_j - k_n + l - 1}|^2} \right) + |\lambda - 1|^2 \| f_n \|^2 \leqslant$$

$$|\lambda|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|f_{lj}|^2}{(w_1 w_2 \cdots w_{k_j - k_n})^2} \right) + |\lambda - 1|^2 \| f_n \|^2 \leqslant$$

$$|\lambda|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{w_1^{2j}} + |\lambda - 1|^2 \| f_n \|^2 =$$

$$|\lambda|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\| f_j \|^2}{(w_1 w_2 \cdots w_{k_j - k_n})^2} + |\lambda - 1|^2 \| f_n \|^2$$

此式对每一个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是成立的. 特别地，取 $\lambda = 1$，对 $\forall n \geqslant 1$ 有

$$\| B_W^{k_n} f - f_n \|^2 \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{w_1^{2j}}$$

任取 $y \in M$，给定 $\varepsilon > 0$，因为$\{f_j\}$是 M 的稠密子集，所以存在 $N_1 > 0$，使得

$$\| f_{N_1} - y \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

另一方面，存在 $N_2 > 0$，使得

$$\left(\sum_{j=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{w_1^{2j}} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

我们取 $N \geqslant \max\{N_1, N_2\}$，使得

$$\| f_N - y \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{w_1^{2j}} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

所以我们有

$$\| B_W^{k_N} f - y \| \leqslant \| B_W^{k_N} - f_N \| + \| f_N - y \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

因此 $\mathbb{C} \cdot \mathrm{Orb}(x, B_W) \cap M$ 在 M 中稠密，由定义知 B_W 是 M 的子空间亚超循环算子.

利用定理 2 的证明方法，我们可以得到下面的结论：

命题 1 设 $T = \lambda B$，$\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $|\lambda| > 1$，其中 B 是 l^2 上的左移算子，则对每个 $n \geqslant 1$，T^n 是关于 M 的子空间超循环算子，从而 T^n 也是关于 M 的子空间亚超循环算子.

证 利用子空间超循环和子空间亚超循环的定义，我们只需要证明 T^n 关于 M 是子空间超循环的. 事实上，对每一个 $n \geqslant 1$，定义 $f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-nk_j} S^{nk_j} f_j$，选取 M 的一个稠密子集$\{y_j\}_{j \geqslant 0}$. 定义一个递增的整数列：$k_0 = 0$，对每个 $j \in \mathbb{N}$，满足

$$\| y_j \| \cdot |\lambda|^{k_{j-1} - k_j} \leqslant |\lambda|^{-j} \qquad k_j > k_{j-1} + | f_{j-1} |$$

再利用定理 2 的证明方法，便得到 T^n 是关于 M 的子空间超循环算子.

命题 2 设 B 是 l^2 上的左移算子. 对 $k \geqslant 1$，定义

$$M = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : a_n = 0, \ \forall n < m\}$$

则 B 是 M 的子空间亚超循环算子.

证 设 $D_1, D_2 \subseteq M$，且 $D_1 = D_2 = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$：只有有限项非零$\}$. 显然，$D_1, D_2$ 是 M 的稠密子集. 对 $\forall x \in D_1$，$\lim_{k \to \infty} B^k x = 0$；对 $\forall y \in D_2$，定义 $x_k = S^k y$，其中 S 是 l^2 上的右移算子. 则 $B^k S^k y = y$，并且

$$\lim_{k \to \infty} \| B^k x \| \cdot \| x_k \| = 0$$

另一方面，对 $\forall x \in M$，我们有 $B^k x \in M$. 所以由文献[12]中定理 1.11 可得，B 是关于 M 的子空间亚超循环算子.

参考文献：

[1] BAYART F, MATHERON E. Dynamics of Linear Operators [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] KARL G. Grosse Erdmann, Afred Peris Manguillot, Linear Chaos [M]. London: Springer-Verlag, 2011.

[3] SHU Yong-lu, ZHAO Xian-feng. The Conjugate Class of a Supercyclic Operator [J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2012, 6(3): 603－611.

[4] LEON-SAAVEDRA F, MULLER V. Rotations of Hypercyclic and Supercyclic Operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2004, 50(3): 385－391.

[5] HERRERO D A. Limits of Hypercyclic and Supercyclic Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 1991, 99(1):

179－190.

[6] KARAMI P，HABIBI M. On Density and Hypercyclicity [J]. International Mathematical Forum，2013，8(9)：401－405.

[7] BOURDON P S，FELDMAN N S. Somewhere Dense Orbits Are Everywhere Dense [J]. Indiana Univ Math，2003，52(3)：811－819.

[8] MADORE B F，MARTINEZ-AVENDANO R A. Subspace Hypercyclicity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2011，373(2)：502－511.

[9] LE C M. On Subspace-Hypercyclic Operators [J]. Amber Math Soc，2011，139(8)：2847－2852.

[10] JIMENEZ-MUNGUIA R R，MARTINEZ-AVENDANO R A，PERIS A. Some Questions About Subspace Hypercyclic Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013(4－8)：209－212.

[11] REZAEI H. Notes on Subspace-Hypercyclic Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013，397：428－433.

[12] ZHAO Xian-feng，SHU Yong-lu，ZHOU Yun-hua. Subspace-Supercyclicity and Common Subspace Supercyclic Vectors [J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2012，2012(1)：106－112.

[13] MONTES-RODRIGUEZ A，SALAS H N. Supercyclic Subspaces：Spectral Theory and Weighted Shifts [J]. Advances in Mathematics，2001，163(1)：74－134.

[14] 赵显锋，舒永录. Supercyclic 算子族的公共超循环向量 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(4)：101－104.

[15] GROSSE-ERDMANN K G. Hypercyclic and Chaotic Weighted Shifts [J]. Studia Math，2000，139(1)：47－68.

Subspace-Supercyclicity of Shift Operators

LIU Meng-lin，　SHU Yong-lu

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：With the methods of hypercyclic operator researches，a sufficient condition for a bounded linear operator to be supercyclic is obtained，and several properties of the subspace-supercyclic operators and are discussed.

Key words：shift operator；supercyclic operator；subspace-supercyclicity

责任编辑　廖　坤