第 36 卷第 12 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2014年12月
Vol. 36 No. 12 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Dec. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.12.013

Hilbert 空间上算子(p, q)-外广义逆的刻画①

刘 妮， 任谨慎

空军工程大学 理学院，西安 710051

摘要：对无限维 Hilbert 空间 H 中的有界线性算子 A，用 $A^{(2)}_{P,Q}$ 表示 A 的(p, q)-外广义逆，其中 P,Q 为 H 中的幂等算子. 利用算子分块矩阵的方法，研究了 $A^{(2)}_{P,Q}$ 存在的等价条件，给出了 Hilbert 空间中以(1, 5)-逆为基础的 $A^{(2)}_{P,Q}$ 的刻画.

关 键 词：Hilbert 空间；外广义逆；幂等算子

中图分类号：O151.21 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2014)12-0065-07

设 H,K 为无限维的 Hilbert 空间. H 及 H 到 K 上的有界线性算子全体分别记作 $B(H)$,$B(H, K)$. 记 $R(T)$,$N(T)$ 为算子 T 的值域及核空间，$\overline{A}$ 为集合 A 的范数闭包. Hilbert 空间 K 上的单位算子记作 I_K，在不会引起混淆时可简记为 I. H 上的全体正交投影算子、幂等算子分别记作

$$P(H)=\{P\in B(H)\mid P^2=P=P^*\}$$

$$I(H)=\{P\in B(H)\mid P^2=P\}$$

定义 1 设 $A\in B(H, K)$，若 $ACA=A$，则称 $C\in B(K, H)$ 是 A 的一个内广义逆，此时称 A 是内正则的，记作

$$A^{(1)}=\{C\in B(K, H)\mid ACA=A\}$$

特别地，若 $C\in B(H)$ 是 $A\in B(H)$ 的一个满足 $CA=AC$ 的内广义逆，则称 C 为 A 的(1, 5)-逆，记作

$$A^{(1,5)}=\{C\in B(H)\mid ACA=A,\ AC=CA\}$$

我们知道，常见的广义逆主要有：Moore-Penrose 逆 A^+、Drazin 逆 A^D[1]、广义 Bott-Duffin 逆 $A^+_{(L)}$[2]，而它们都可以用具有指定值域 M 和核空间 N 的外逆 $A^{(2)}_{M,N}$ 来表示. A 的外广义逆是 $A^{(2)}_{M,N}$ 的推广，其定义可参见文献[3-4].

定义 2[3] 设 $A\in B(H)$，P,$Q\in I(H)$，若存在 $B\in B(H)$ 满足

$$BAB=B \qquad BA=P \qquad AB=I-Q \tag{1}$$

则称 B 为 A 的(p, q)-外广义逆，记作 $A^{(2)}_{P,Q}=B$.

显然，当 P,$Q\in P(H)$ 时，有 $A^{(2)}_{P,Q}=A^{(2)}_{R(P),R(Q)}$. $A^{(2)}_{P,Q}$ 的唯一性可参见文献[3].

若 $A^{(2)}_{P,Q}$ 满足 $AA^{(2)}_{P,Q}A=A$，则称 $A^{(2)}_{P,Q}$ 为 A 的(p, q)-自反广义逆，记作 $A^{(1,2)}_{P,Q}=A^{(2)}_{P,Q}$. 为方便起见，当 $P=Q$ 时，记 $A^{(2)}_{P,Q}=A^{(2)}_{P}$.

一般地，若 $A\in B(H)$，M,N 为 H 的闭子空间，则 A 具有矩阵形式

---

① 收稿日期：2014-02-18

基金项目：国家自然科学基金青年基金资助项目(11001159).

作者简介：刘 妮(1976-)，女，陕西蓝田人，讲师，主要从事算子广义逆的研究.

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}: M\oplus M^{\perp}\longrightarrow N\oplus N^{\perp}$$

其中

$$A_1\in B(M,N)\qquad A_2\in B(M^{\perp},N)\qquad A_3\in B(M,N^{\perp})\qquad A_4\in B(M^{\perp},N^{\perp})$$

特别地，若 $P,Q\in I(H)$，则 P,Q 分别具有矩阵形式

$$P=\begin{pmatrix}I & P_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}: R(P)\oplus R(P)^{\perp}\qquad Q=\begin{pmatrix}I & Q_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}: R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}\tag{2}$$

其中

$$P_1\in B(R(P)^{\perp},R(P))\qquad Q_1\in B(R(Q)^{\perp},R(Q))$$

近年来，广义逆的表示理论被很多学者所关注[3-8]. 文献[3]首次将外广义逆引入环中，并对Banach空间中的(p,q)-外广义逆进行了研究. 文献[4]讨论了Banach代数中(p,q)-外广义逆存在的条件. 然而，我们发现文献[4]的定理1.4和定理2.1中“(ⅲ)⇒(ⅰ)”是不成立的. 本文将针对这两个定理分别给出反例，同时在Hilbert空间中对文献[4]的定理1.2进行了修正，给出以$(1,5)$-逆为基础的外广义逆的表示.

引理1 设 $A\in B(H)$. $P,Q\in I(H)$ 可以表示为(2)式的形式，

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}: R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

则 $A_{P,Q}^{(2)}$ 存在当且仅当 A_3 在 $R(P)$ 到 $R(Q)^{\perp}$ 上是可逆的，且

$$A_1=-Q_1A_3\qquad A_4=A_3P_1$$

此时

$$A_{P,Q}^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & A_3^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}: R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}\longrightarrow R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

证 *充分性* 直接验证即可.

必要性 设 $B=A_{P,Q}^{(2)}$，由(1)式有

$$B=BAB=B(I-Q)$$

所以 $BQ=0$. 显然 $PB=BAB=B$，则 B 有矩阵形式

$$B=\begin{pmatrix}0 & B_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}: R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}\longrightarrow R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

由于

$$BA=\begin{pmatrix}B_1A_3 & B_1A_4\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & P_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

故

$$B_1A_3=I_{R(P)}\qquad B_1A_4=P_1$$

类似地，由 $AB=I-Q$ 可知

$$A_3B_1=I_{R(Q)^{\perp}}\qquad A_1B_1=-Q_1$$

因此 A_3 在 $R(P)$ 到 $R(Q)^{\perp}$ 上是可逆的，且 $B_1={A_3}^{-1}$，所以

$$A_1=-Q_1A_3\qquad A_4=A_3P_1$$

推论1 设 $A\in B(H)$，

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}: R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}\qquad P,Q\in P(H)$$

则 $A_{P,Q}^{(2)}$ 存在当且仅当 A_3 在 $R(P)$ 到 $R(Q)^{\perp}$ 上可逆，且 $A_1=0$，$A_4=0$.

证 由于 $P,Q\in P(H)$，则

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

$$Q=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

由引理 1，结论显然成立.

下面，分别给出文献[4]中定理 1.4 和定理 1.2 的反例：

例 1　设 $P\in P(H)$，$\dim R(P)=\dim R(P)^{\perp}=\infty$，令

$$Q=\begin{pmatrix} I & Q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

其中 A_{21} 可逆，$A_{22}\neq 0$. 令

$$B=\begin{pmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

由于

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

容易看出

$$BAB=\begin{pmatrix} I & A_{21}^{-1}A_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

$$BAP=\begin{pmatrix} I & A_{21}^{-1}A_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=P$$

$B(I-Q)=B$，$(I-Q)AB=I-Q$，且 $PB=B$.

然而 $A_{P,Q}^{(2)}$ 不存在. 事实上，若

$$A_{P,Q}^{(2)}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}:R(P)\longrightarrow R(P)^{\perp}$$

则

$$A_{P,Q}^{(2)}A=\begin{pmatrix} B_{12}A_{21} & B_{12}A_{22} \\ B_{22}A_{21} & B_{22}A_{22} \end{pmatrix}=P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故

$$B_{12}A_{21}=I \qquad B_{12}A_{22}=0$$

注意到 A_{21} 可逆，所以 B_{12} 可逆，因此 $A_{22}=0$，矛盾.

例 2　设 $P\in P(H)$ 是例 1 中的形式，$Q=P$. 令

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

其中 $A_{11}\neq 0$，A_{21} 是可逆的. 取

$$C=\begin{pmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

由定义容易算出

$$C_{I-P,\ I-P}^{(1,\ 2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

且 $CA=P$，因此 $P\in(CA)^{(1,5)}$. 注意到 A_{21}^{-1} 在 $R(P)^{\perp}$ 到 $R(P)$ 上可逆，所以

$$R(CA)=R(P)=R(C)$$

然而 $A_P^{(2)}$ 不存在，事实上由推论 1，若 $A_P^{(2)}$ 存在，则 $A_{11}=0$，矛盾.

在 Hilbert 空间中对文献[4]的定理 1.2 进行修正，我们有如下的定理：

定理 1　设 $A,C\in B(H)$，$P,Q\in I(H)$ 形如(2)式. 若 $C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}$ 存在，则以下命题等价：

(i) $A_{P,Q}^{(2)}$ 存在；

(ii) $(AC)^{(1,5)}$ 存在，$N(A)\cap R(C)=\{0\}$，且 $AP=(I-Q)A$；

(iii) $(CA)^{(1,5)}$ 存在，$R(C)=R(CA)$，$AP=(I-Q)A$.

此时 CAC 是内正则的，且

$$A_{P,Q}^{(2)}=C(AC)^{(1,5)}=(CA)^{(1,5)}C=C(CAC)^{(1)}C$$

证　若 $C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}$ 存在，则

$$C=CC_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}C=C(I-Q)$$

所以 $CQ=0$. 类似地，$C=CC_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}C=PC$，因此

$$R(Q)\subseteq N(C)\qquad R(C)\subseteq R(P)$$

故

$$C=\begin{pmatrix}0 & C_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}:R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}\longrightarrow R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

又注意到 $CC_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}=P$，所以 $R(P)\subseteq R(C)$，因此 $R(P)=R(C)$，即在 $R(Q)^{\perp}\longrightarrow R(P)$ 上 C_2 是满射.

另一方面，由 $C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}C=I-Q$ 可知，$C^*\,[C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}]^*=I-Q^*$，所以

$$R(I-Q^*)\subseteq R(C^*)$$

因此

$$\overline{R(I-Q^*)}\subseteq\overline{R(C^*)}$$

故

$$R(Q)^{\perp}=N(I-Q)^{\perp}=\overline{R(I-Q^*)}\subseteq\overline{R(C^*)}=N(C)^{\perp}$$

这说明 C_2 在 $R(Q)^{\perp}$ 到 $R(P)$ 上是单的，因此 C_2 在 $R(Q)^{\perp}$ 到 $R(P)$ 上是可逆的.

由于 $C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}$ 存在，不妨设

$$C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

根据定义，$C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}$ 满足：

1) $C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}C=I-Q$，即

$$\begin{pmatrix}0 & c_{11}C_2\\ 0 & c_{21}C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -Q\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

由于 C_2 在 $R(Q)^{\perp}$ 到 $R(P)$ 上可逆，故 $c_{11}=-QC_2^{-1}$，$c_{21}=C_2^{-1}$；

2) $CC_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}=P$，即

$$\begin{pmatrix}I & C_2c_{22}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & P_1\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

故 $c_{22}=C_2^{-1}P_1$；

3) $C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}CC_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}=C_{I-Q,\,I-P}^{(1,2)}$，即

$$\begin{pmatrix}-Q_1C_2^{-1} & -Q_1C_2^{-1}P_1\\ C_2^{-1} & C_2^{-1}P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Q_1C_2^{-1} & c_{12}\\ C_2^{-1} & C_2^{-1}P_1\end{pmatrix}$$

故 $c_{12}=-Q_1C_2^{-1}P_1$；

4）由以上论证可知

$$C_{I-Q,\,I-P}^{(1,\,2)}=\begin{pmatrix}-Q_1C_2^{-1} & -Q_1C_2^{-1}P_1\\ C_2^{-1} & C_2^{-1}P_1\end{pmatrix}$$

且容易验证 $CC_{I-Q,\,I-P}^{(1,\,2)}C=C$ 也成立，因此

$$C_{I-Q,\,I-P}^{(1,\,2)}=\begin{pmatrix}-Q_1C_2^{-1} & -Q_1C_2^{-1}P_1\\ C_2^{-1} & C_2^{-1}P_1\end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

(i)$\Longrightarrow$(ii)　若 $A_{P,Q}^{(2)}$ 存在，则 $AP=AA_{P,Q}^{(2)}A=(I-Q)A$，由引理 1，

$$A=\begin{pmatrix}-Q_1A_3 & A_2\\ A_3 & A_3P_1\end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

且 A_3 在 $R(P)$ 到 $R(Q)^{\perp}$ 上是可逆的，因此

$$AC=\begin{pmatrix}0 & -Q_1A_3C_2\\ 0 & A_3C_2\end{pmatrix}:R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

容易验证

$$\begin{pmatrix}0 & -Q_1C_2^{-1}A_3^{-1}\\ 0 & C_2^{-1}A_3^{-1}\end{pmatrix}\in(AC)^{(1,\,5)}$$

假设 $z\in N(A)\cap R(C)$，则 $z=x+y$，其中 $x\in R(P)$，$y\in R(P)^{\perp}$. 由于

$$R(C)=R(P)$$

所以

$$z-x=y\in R(P)^{\perp}\cap R(P)$$

故 $y=0$，$z=x\in N(A)\cap R(P)$，所以

$$Az=\begin{pmatrix}-Q_1A_3 & A_2\\ A_3 & A_3P_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

故 $A_3x=0$，注意到 A_3 是可逆的，所以 $x=0$，因此 $N(A)\cap R(C)=\{0\}$.

(i)$\Longrightarrow$(iii)　由 (i)$\Rightarrow$(ii) 知

$$CA=\begin{pmatrix}C_2A_3 & C_2A_3P_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(P)\oplus R(P)^{\perp}$$

因此

$$\begin{pmatrix}A_3^{-1}C_2^{-1} & A_3^{-1}C_2^{-1}P_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in(CA)^{(1,\,5)}$$

由于 C_2A_3 在 $R(P)$ 上可逆，所以

$$R(P)=R(C_2A_3)\subseteq R(CA)\subseteq R(C)=R(P)$$

故

$$R(CA)=R(C)$$

(iii)$\Longrightarrow$(i)　令

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}:R(P)\oplus R(P)^{\perp}\longrightarrow R(Q)\oplus R(Q)^{\perp}$$

注意到 $AP=(I-Q)A$. 所以

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & P_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -Q_1\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}P_1 \\ A_{21} & A_{21}P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_1A_{21} & -Q_1A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

故

$$A = \begin{pmatrix} -Q_1A_{21} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}P_1 \end{pmatrix}$$

由于 $R(CA) = R(C)$,

$$CA = \begin{pmatrix} C_2A_{21} & C_2A_{21}P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$R(P) = R(C) = R(CA) \subseteq R(C_2A_{21}) \subseteq R(P)$$

所以 C_2A_{21} 是 $R(P)$ 上的满射. 注意到$(CA)^{(1,5)}$ 存在，不妨设 $B \in (CA)^{(1,5)}$ 具有矩阵形式

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}: R(P) \oplus R(P)^{\perp}$$

则有

$$\begin{pmatrix} B_1C_2A_{21} & B_1C_2A_{21}P_1 \\ B_3C_2A_{21} & B_3C_2A_{21}P_1 \end{pmatrix} = BCA = CAB = \begin{pmatrix} C_2A_{21}(B_1 + P_1B_3) & C_2A_{21}(B_2 + P_1B_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故

$$C_2A_{21}(B_2 + P_1B_4) = B_1C_2A_{21}P_1$$

且 $B_3C_2A_{21} = 0$. 注意到 $R(C_2A_{21}) = R(P)$，因此 $B_3 = 0$，进一步

$$C_2A_{21}(B_1 + P_1B_3) = B_1C_2A_{21}$$

即

$$B_1C_2A_{21} = C_2A_{21}B_1$$

另外，由 $CABCA = CA$，有

$$\begin{pmatrix} C_2A_{21}B_1 & C_2A_{21}(B_2 + P_1B_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2A_{21} & C_2A_{21}P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2A_{21} & C_2A_{21}P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$C_2A_{21}B_1C_2A_{21} = C_2A_{21}$$

由于 C_2A_{21} 在 $R(P)$ 上是满的，因此 $C_2A_{21}B_1 = I$，进一步

$$B_1C_2A_{21} = C_2A_{21}B_1 = I$$

所以 C_2A_{21} 是 $R(P)$ 上的可逆算子，而由于 C_2 在 $R(Q)^{\perp}$ 到 $R(P)$ 上可逆，因此 A_{21} 在 $R(P)$ 到 $R(Q)^{\perp}$ 上可逆，因此

$$(CA)^{(1,5)} = \left\{\begin{pmatrix} A_{21}^{-1}C_2^{-1} & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \mid B_2 = A_{21}^{-1}C_2^{-1}P_1 - P_1B_4,\ B_4 \in B(R(P)^{\perp})\right\}$$

由引理1可知 $A_{P,Q}^{(2)}$ 存在，且

$$A_{P,Q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (CA)^{(1,5)}C$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) 与 (iii)$\Longrightarrow$(i) 类似.

由上面的证明容易计算

$$(CAC)^{(1)} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ C_2^{-1}A_{21}^{-1}C_2^{-1} & X_3 \end{pmatrix}: R(P) \oplus R(P)^{\perp} \mid X_1 \in B(R(P)),\ X_2 \in B(R(P)^{\perp}, R(P)),\ X_3 \in B(R(P)^{\perp})\right\}$$

显然 $A_{P,Q}^{(2)} = C(CAC)^{(1)}C$ 成立.

参考文献：

[1] KOLIHA J J. The Drazin and Moore-Penrose Inverse in C^*-Algebras [J]. Math Proc Royal Irish Acad，1999，99：17－27.

[2] 刘国明，陈果良. 广义 Bott-Duffin 逆的扰动理论 [J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2000，1(1)：1－6.

[3] DJORDJEVIC D S，WEI Yi-min. Outer Generalized-Inverses in Rings [J]. Comm Algebra，2005，33：3051－3060.

[4] ILIC D C，LIU Xiao-ji，ZHONG Jin. On the (p, q)-Outer Generalized Inverse in Banach Algebra [J]. Applied Mathematics and Computation，2009，209：191－196.

[5] ISRAEL A B，GREVILLE T N E. Generalized Inverse：Theory and Applications [M]. 2 th ed. New York：Springer-Verlag，2003.

[6] WANG Guo-rong，Wei Yi-min，QIAO San-zheng. Generalized Inverse：Theory and Computations [M]. New York：Science Press，2004.

[7] WEI Yi-min. A Characterization and Representation of the Generalized Inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and Its Applications [J]. Linear Algebra Appl，1998，280：87－96.

[8] 刘　妮，李炳杰，郭艳鹂. 广义 Aluthge 变换的 Drazin 逆 [J]. 空军工程大学学报：自然科学版，2014，15(3)：91－94.

A Characterization and Representation of the (p, q)-Outer Generalized Inverse in Hilbert Space

LIU　Ni，　REN Jin-shen

College of Science，Air Force Engineering University，Xi'an 710051，China

Abstract：For any bounded linear operator A in infinite-dimensional Hilbert space H，its (p, q)-outer generalized inverse is denoted by $A^{(2)}_{P,Q}$，where P，Q are idempotent operators in H. By the method of operational partitioning of matrices，the equivalent conditions of the existence of $A^{(2)}_{P,Q}$ are considered in this note；and a representation of $A^{(2)}_{P,Q}$ based on the (1，5)-inverse is presented.

Key words：Hilbert space；outer generalized inverse；idempotent operator

责任编辑　廖　坤