第 36 卷第 12 期　西南大学学报（自然科学版）　2014年12月
Vol. 36　No. 12　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Dec.　2014

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.12.012

有限交换群的直积分解①

张　钰，　吕　恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 已知有限交换群的最高阶元生成的循环群是其直积因子. 主要得到了：有限交换群的最低阶生成元生成的子群也是其直积因子. 即设 G 是交换群，x 是群 G 的最低阶生成元，则存在子群 $G_1 \leqslant G$，使得 $G = \langle x \rangle \times G_1$.

关　键　词： 有限交换群；直积；交换 p-群

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2014)12-0061-04

交换群的直积分解是交换群的一个重要研究方向，也是刻画交换群结构的一种很重要的方法. 尽管交换群是群里最为简单的一类群，尤其是有限交换群从理论上已经知道是循环群的直积，但是对于一个交换群 G 的子群 H，在满足什么条件时才存在一个子群 K 使得 $G = H \times K$，即 H 是群 G 的直积因子？ 这方面问题有一定难度，结论并不是很多.

文献[1]的定理 4.1.3 证明了：无限交换群 G 的任意可除交换子群 D 一定存在子群 G_1 使得 $G = D \times G_1$. 这是可除交换群的一个重要的性质，尤其是在可除交换 p-群的应用[2-3]上有极为重要的作用. 对于交换群 G，规定其特征子群

$$G^n = \langle g^n \mid g \in G \rangle$$

交换群 G 的一个子群 H 称为纯子群当且仅当对任意正整数 n 都有 $H^n = G^n \cap H$. 文献[1]的定理 4.3.8 证明了：交换群 G 的任意阶有限的纯子群也是群 G 的直积因子. 但纯子群的直接应用相对较少.

目前大家最为熟悉的结论是有限交换群的最高阶元生成的循环群是其直积因子. 设群 G 是有限交换 p-群，x 是其一个最高阶元，则 $x \in G \backslash G^p$. 而 G^p 是群 G 的 Frattini 子群，因此 x 是 G 的一个生成元. 由于任意有限交换群的所有最高阶元一定是其所有的 Slyow p-子群的最高阶元的乘积，因此交换群的最高阶元一定是其生成元. 我们知道，交换群存在生成元，其生成的子群不是此交换群的直积因子. 例如群 $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$，其中 $o(a) = p^3$，$o(b) = p$，易得 $a^p b$ 也是 G 的一个生成元，但是 $\langle a^p b \rangle$ 却不是 G 的直积因子. 而交换群的最低阶生成元生成的子群是否是此交换群的直积因子？ 这显然是一个让人感兴趣的问题，目前还没有相关结论. 在本文中，我们将证明交换群的最低阶生成元生成的循环子群是其直积因子.

引理 1[4]　设 A 是有限非循环交换 p-群，a 是 A 中的一个最高阶元素，则存在 $B \leqslant A$，使得

$$A = \langle a \rangle \times B$$

引理 2　设 G 是交换 p-群，若 $a \in G \backslash G^p$，且 a 是 aG^p 中的一个最低阶元素，则存在子群 G_0，使得

$$G = \langle a \rangle \times G_0$$

---

① 收稿日期：2014-04-02

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11271301，11471226).

作者简介：张　钰(1989-)，女，河南周口人，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：吕　恒，教授.

证 若 a 是 G 中一个最高阶元素，由引理1可知，结论显然成立. 不妨设 x 是 G 中一个最高阶元素，且 $o(x)>o(a)$，则存在子群 G_1，使得

$$G=\langle x\rangle\times G_1$$

下面用归纳法对群的阶进行讨论：

若 $a\in G_1$，则 $a\in aG_1^p\subseteq aG^p$ 是 aG_1^p 中最低阶元素. 因为 $|G_1|<|G|$，由归纳法可知，存在子群 $G_2\leqslant G_1$，使得

$$G_1=\langle a\rangle\times G_2$$

令

$$G_0=G_2\times\langle x\rangle$$

有

$$G=\langle a\rangle\times G_0$$

若 $a\notin G_1$，则 $a=x^m g$，其中 $g\in G_1$，$p\mid m$. 由于 $\langle x\rangle\cap G_1=1$，因此有 $o(g)\leqslant o(a)$. 我们断言 g 是 gG_1^p 中最低阶元素. 否则，设存在 $g_1\in G_1^p$，使得 gg_1 是 gG_1^p 中最低阶元素，则有 $o(gg_1)<o(g)$，从而得到

$$o(x^{-m}ag_1)<o(g)\leqslant o(a)$$

又因为 $x^{-m}\in\langle x^p\rangle$，$g_1\in G_1^p$，所以

$$x^{-m}ag_1=ax^{-m}g_1\in aG^p$$

这与 a 是 aG^p 中最低阶元素相矛盾. 故 g 是 gG_1^p 中最低阶元素. 因为 $|G_1|<|G|$，由归纳法可知，存在子群 $G_3\leqslant G_1$，使得

$$G_1=\langle g\rangle\times G_3$$

于是有

$$G=\langle x\rangle\times\langle x^{-m}a\rangle\times G_3$$

令子群 $H=\langle x,x^{-m}a\rangle$，则 $H=\langle x,a\rangle$. 若 $\langle x\rangle\cap\langle a\rangle\neq 1$，由 $o(x)>o(a)$ 可知，存在整数 k 满足 $p\mid k$，且使得 $o(ax^k)<o(a)$，这与 a 是 $aH^p\subseteq aG^p$ 中最低阶元素相矛盾. 因此

$$\langle x\rangle\cap\langle a\rangle=1$$

即

$$H=\langle x\rangle\times\langle a\rangle$$

于是有

$$G=\langle x\rangle\times\langle a\rangle\times G_3$$

令

$$G_0=\langle x\rangle\times G_3$$

则有

$$G=\langle a\rangle\times G_0$$

引理3[5] 设 G 是有限 p-群，则 G 的 Frattini 子群 $\Phi(G)=G^pG'$.

引理4 设 G 是交换 p-群，若 y 是 G 中的最低阶生成元，则存在子群 G_1，使得

$$G=\langle y\rangle\times G_1$$

证 因为 G 是交换 p-群，所以由引理3可得，G 的 Frattini 子群 $\Phi(G)=G^p$. 由于 y 是 G 中最低阶的生成元，则有 $y\notin G^p$. 显然 yG^p 中的任意一个元素都可以看作是群 G 的一个生成元，故 y 是 yG^p 中最低阶元素. 由引理2可得，存在子群 G_1，使得

$$G=\langle y\rangle\times G_1$$

定理1 设 G 是交换群，x 是群 G 的最低阶生成元，则存在子群 $G_1\leqslant G$，使得

$$G=\langle x\rangle\times G_1$$

证 由于

$$G = G_{p1} \times G_{p2} \times \cdots \times G_{p_s}$$

其中 $G_{p_i}(i=1,2,\cdots,s)$ 是 G 的 Sylow p_i-子群. 令 $x = x_1 x_2 \cdots x_s$，其中 $x_i \in G_{p_i}(i=1,2,\cdots,s)$. 不妨设 x_1 是 G_{p1} 的一个生成元，则由 x 是最低阶生成元可知 $x = x_1$，且 x 是 G_{p1} 的最低阶生成元. 由引理 4 可得，存在子群 $K \leqslant G_{p1}$，使得

$$G_{p1} = \langle x \rangle \times K$$

令

$$G_1 = K \times G_{p2} \times \cdots \times G_{p_s}$$

则

$$G = \langle x \rangle \times G_1$$

注 1　利用交换群的最高阶元生成的循环子群是其直积因子，可以把交换群分解为循环群的直积. 类似地，利用有限交换群的最低阶生成元生成的循环子群是直积因子，也可以把有限交换群分解为循环群的直积. 去掉生成元这个条件，定理 1 的结论不成立，例如交换 p-群的 p 阶子群不一定是直积因子.

定理 2　设 G 是交换 p-群，G_1 是 G 的子群. 若 $|G : G_1| = p$，$x_1 \in G \backslash G_1$ 且为最低阶元素. 则有

(ⅰ) $o(x_1) = p$ 时，$G = \langle x_1 \rangle \times G_1$；

(ⅱ) $o(x_1) \geqslant p^2$ 时，存在子群 G_2，使得

$$G_1 = \langle x_1^p \rangle \times G_2$$

证　(ⅰ) 若 $o(x_1) = p$，则有

$$\langle x \rangle \cap G_1 = 1$$

于是有

$$G = \langle x_1 \rangle \times G_1$$

(ⅱ) 若 $o(x_1) \geqslant p^2$，下面证明 $x_1^p \notin G_1^p$. 假设 $x_1^p \in G_1^p$，则存在 $y \in G_1$，使得 $y^p = x_1^p$，令子群 $H = \langle x_1, y \rangle$. 因为

$$\langle x_1 \rangle \cap \langle y \rangle = \langle x_1^p \rangle$$

所以

$$|H| = \frac{|\langle x_1 \rangle| |\langle y \rangle|}{|\langle x_1 \rangle \cap \langle y \rangle|} = p o(x_1)$$

且 x_1 是 H 中最高阶元素. 于是由引理 1 可知，存在 $x_2 \in H$ 使得

$$H = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$$

其中

$$o(x_2) = p$$

从而可得

$$y = x_1^{l_1} x_2^{l_2}$$

又因为

$$o(y) = o(x_1)$$

所以

$$(l_1, p) = 1$$

若 $x_2^{l_2} \notin G_1$，则 $x_2 \in G \backslash G_1$，这与 x_1 是 $G \backslash G_1$ 中最低阶元素相矛盾，于是有 $x_2 \in G_1$，即 $x_1^{l_1} \in G_1$，$x_1 \in G_1$，矛盾. 故 $x_1^p \notin G_1^p$.

下面证 x_1^p 是 $x_1^p G_1^p$ 中最低阶元素. 假设 $y_1 \in G_1$，使得 $x_1^p y_1^p$ 是 $x_1^p G_1^p$ 中最低阶元素，则

$$o(x_1) > o(x_1 y_1)$$

显然 $x_1 y_1 \notin G_1$，这与 x_1 是 $G \backslash G_1$ 中最低阶元素相矛盾，故 x_1^p 是 $x_1^p G_1^p$ 中最低阶元素. 由定理 1 可知，存在子群 G_2 使得

$$G_1 = \langle x_1^p \rangle \times G_2$$

注 2 定理 2 的结论能否推广为如下结论：

设 G 是交换 p-群，G_1 是 G 的子群. 若 $|G:G_1|=p^k$，$x_1\in G\backslash G_1$ 且为最低阶元素，满足 $G=\langle G_1, x_1\rangle$. 则有

(i) $o(x_1)=p^k$ 时，

$$G=\langle x_1\rangle\times G_1$$

(ii) $o(x_1)>p^k$ 时，存在子群 G_2 使得

$$G_1=\langle x_1^{p^k}\rangle\times G_2$$

但是这样推广 $G=\langle G_1, x_1\rangle$ 就不成立了. 例如 $G=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$，其中

$$o(a)=p^3 \qquad o(b)=p$$

考虑子群 $G_1=\langle a^p b\rangle$，则 $|G:G_1|=p^2$. 易得 a 是 $G\backslash\langle a^p b\rangle$ 中最低阶元素，且满足 $G=\langle a, a^p b\rangle$，但是 $\langle a^{p^2}\rangle$ 不满足结论 (ii).

参考文献：

[1] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[2] 薛海波，吕 恒. 含有 CC-子群的局部有限群 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(12)：10－12.

[3] LV Heng, ZHOU Wei, GUO Xiu-yun. On Groups with a CC(n)-Subgroup [J]. Communications in Algebra, 2013, 41(3): 1182－1188.

[4] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[5] HUPPERT B, BLACKBURN N. Finite Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1967.

Direct Product of Finite Abelian Groups

ZHANG Yu, LV Heng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In a finite abelian group, the cyclic subgroup generated by a maximal order element is its direct product. Here, we show that the subgroup generated by a generated minimal order element is also a direct product, that is, let G be an abelian group and x a generated element of minimal order in G, then there exists $G_1\leqslant G$ such that $G=\langle x\rangle\times G_1$.

Key words: finite abelian group; direct product; abelian p-group

责任编辑 廖 坤