DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.12.010

关于最大 G-共轭类长的数量性质①

赵先鹤, 耿旭旭, 汪艳丽

河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007

摘要: 设 N 是有限群 G 的一个正规子群, 假设 m, n 是 N 的两个最长的非中心 G-共轭类长. 在 m, n 满足 $(m, n)=1$ 且它们均无平方因子的条件下, 对 N 的结构作了一定的描述, 得到了 N 是一个超可解群.

关 键 词: 正规子群; 共轭类长; 无平方因子; 超可解群

中图分类号: O152.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2014)12-0051-05

在这篇文章里, 我们假定所有的群都是有限群. 设 G 是一个群, π 是一些素数的集合, x 是 G 的一个元素. 我们用符号 x^G 表示包含 x 的共轭类, $|x^G|$ 表示共轭类 x^G 的长度, x_π 和 $x_{\pi'}$ 分别表示元素 x 的 π-组成部分和 π'-组成部分. 除此之外, 我们还用 G_π 表示 G 的 π-Hall 子群, $G_{\pi'}$ 表示 G 的 π'-Hall 子群.

近年来, 许多群论工作者都致力于研究有限群的结构和其共轭类长之间的关系[1-12]. 其中, 文献[1-2] 给出了群 G 的两个最长的共轭类长的某些数量性质与群 G 的结构之间的关系. 另外, 设 N 是群 G 的正规子群, 则 N 是一些 G-共轭类的并. 文献[3] 给出了当群 G 的正规子群 N 中两个最长的非中心 G-共轭类长互素时 N 的结构. 文献[4] 用极小阶反例法证明了: 若群 G 的所有共轭类长无平方因子, 则 G 超可解. 在这篇文章里, 我们以正规子群 N 中两个最长的非中心 G-共轭类长为研究对象, 在它们互素且无平方因子的情形下, 得到了 N 的超可解性.

主要结果如下:

定理 1 设 G 是一个有限群, N 是 G 的一个正规子群. 设 $a, b \in N$, $|b^G|=m$, $|a^G|=n$. 假设 $m>n$ 是 N 的两个最长的非中心 G-共轭类长, 满足 $(m, n)=1$, 且 m, n 均无平方因子, 那么 N 超可解. 特别地, 如果 $N/Z(N)$ 不是一个素数幂阶群, 那么 $N/Z(N)$ 是一个 Frobenius 群.

引理 1[5] 设 N 是有限群 G 的正规子群, x 是 G 的一个元素. 那么

(a) $|x^N|$ 整除 $|x^G|$;

(b) $|(Nx)^{G/N}|$ 整除 $|x^G|$.

引理 2[6] 设 N 是有限群 G 的正规子群, $b, c \in N$. 令 $B=b^G$, $C=c^G$, 且 $(|B|, |C|)=1$. 那么

(a) $G=C_G(b)C_G(c)$;

(b) $BC=CB$ 是 N 的一个 G-共轭类, 且 $|BC|$ 整除 $|B||C|$.

引理 3[3] 设 N 是有限群 G 的正规子群, B_0 是 N 的一个最长的非中心 G-共轭类长, 且 $|B_0|=m$, 则

① 收稿日期: 2014-03-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771172, 11271301, U1204101); 河南省教育厅重点项目(13B110085).
作者简介: 赵先鹤(1978-), 女, 河南南阳人, 副教授, 主要从事有限群及其应用的研究.

有下列结论成立：

(a) 令 C 是 N 的一个 G-共轭类，且 $(|B_0|, |C|)=1$，那么 $|\langle C^{-1}C\rangle|$ 整除 $|B_0|$；

(b) 令 m, n 是 N 的两个最长的 G-共轭类长，且 m, n 满足 $m > n$，$(m, n)=1$，D 是 N 的一个 G-共轭类，且 $|D|>1$，如果 $(|D|, n)=1$，那么 $|D|=m$.

引理 4[3] 设 N 是有限群 G 的正规子群，令 B_0 是 N 的一个最长的非中心 G-共轭类. 令

$$M=\langle D \mid D \text{ 是 } N \text{ 的一个 } G\text{-共轭类，且} (|D|, |B_0|)=1\rangle$$

那么 M 是一个交换群. 进一步，如果 $(Z(G)\cap N)<M$，那么

$$\pi(M/(Z(G)\cap N))\subseteq \pi(B_0)$$

引理 5[7] 设 N 是有限群 G 的正规子群，假设 $m=|b^G|>|a^G|=n$ 是 N 的两个最长的非中心 G-共轭类长，且 $(m, n)=1$. 如果 m 无平方因子，那么 $N/Z(N)$ 或者是一个素数幂阶群，或者

(a) 对任意的 $x\in N$，$|x^N|=1$，$|a^N|$，$|b^N|$；

(b) $N/Z(N)$ 是以交换群 $C_N(a)/Z(N)$ 为核，交换群 $C_N(b)/Z(N)$ 为补的可解的 Frobenius 群.

定理 1 的证明 令

$$M=\langle D \mid D \text{ 是 } N \text{ 的一个 } G\text{-共轭类，且} (|D|, m)=1\rangle$$

设 N 是一个极小阶反例. 我们将分以下步骤来进行证明：

步骤 1 如果 $x\in Z(C_G(b))\cap N$，那么 $x\in Z(G)$ 或 $C_G(x)=C_G(b)$.

显然，由 $x\in Z(C_G(b))$ 可得 $C_G(b)\leqslant C_G(x)$. 如果 $x\notin Z(G)$，则 $|x^G| \,\big|\, m$，所以 $(|x^G|, n)=1$. 由引理 3 知 $|x^G|=m$，即 $C_G(x)=C_G(b)$.

步骤 2 我们可以假设 b 是一个素数幂阶元，设为 p-元.

设 p 为 $o(b)$ 的素因子，b_p 为 b 的 p-部分，且 $C_G(b_p)\neq G$. 那么

$$C_G(b)=C_G(b_pb_{p'})=C_G(b_p)\cap C_G(b_{p'})\leqslant C_G(b_p)$$

所以

$$b_p\in Z(C_G(b))\cap N$$

又因 $b_p\notin Z(G)$，由步骤 1 知 $C_G(b)=C_G(b_p)$. 因此，我们可以假设 b 为 p-元.

步骤 3 $C_N(b)=P\times L$，其中 P 是 $C_N(b)$ 的 Sylow p-子群，L 是 $C_N(b)$ 的 p'-Hall 子群，且 $L\leqslant Z(C_G(b))$. 如果 $L\not\leqslant Z(G)$，则 $C_N(b)\leqslant Z(C_G(b))$.

对任意的 p'-元 $x\in C_N(b)$，有

$$C_G(bx)=C_G(b)\cap C_G(x)\leqslant C_G(b)$$

则 $|b^G| \,\big|\, |(bx)^G|$. 由 $|b^G|$ 的极大性有 $|b^G|=|(bx)^G|$，即

$$C_G(bx)=C_G(b)\leqslant C_G(x)$$

所以 $x\in Z(C_G(b))$，所以 p'-Hall 子群存在，设为 L，即 $L\leqslant Z(C_G(b))$. 则 $C_N(b)=P\times L$，其中 P 为 $C_N(b)$ 的 Sylow p-子群，L 是 $C_N(b)$ 的 p'-Hall 子群，且 $L\leqslant Z(C_G(b))$.

特别地，如果 $L\not\leqslant Z(G)$，令 $y\in L$ 是一个非中心 q-元. 由步骤 1 有 $C_G(y)=C_G(b)$，从而 $C_N(y)=C_N(b)$，所以 $C_N(y)=Q\times L_q$，其中 Q 为 $C_N(y)$ 的 Sylow q-子群，L_q 是 $C_N(y)$(从而也是 $C_N(b)$) 的 q'-Hall 子群，且 $L_q\leqslant Z(C_G(b))$. 注意到 $C_N(b)=LL_q$，其中

$$L\leqslant Z(C_G(b)) \qquad L_q\leqslant Z(C_G(b))$$

所以，$C_N(b)\leqslant Z(C_G(b))$.

步骤 4 $p\nmid m$.

否则，我们有 $p\nmid n=|a^G|$. 由引理 1 有 $p\nmid |a^N|$. 又由引理 2 知 $N=C_N(a)C_N(b)$，所以

$$|a^N|=|N:C_N(a)|=$$
$$|C_N(a)C_N(b):C_N(a)|=|C_N(b):C_N(a)\cap C_N(b)|$$

所以 $C_N(a)\cap C_N(b)$ 包含 $C_N(b)$ 的一个 Sylow p -子群. 那么

$$P\leqslant C_N(a)\cap C_N(b)$$

从而 $P\leqslant C_N(a)$，即 $C_N(a)$ 包含 $C_N(b)$ 的一个 Sylow p -子群. 所以我们有 $b\in P\leqslant C_N(a)$，所以 $b\in C_N(a)$，$a\in C_N(b)$.

如果 $L\nleq Z(G)$，因为 $a\in C_N(b)$，由步骤 3 知 $C_G(b)\leqslant C_G(a)$，那么 $|a^G|\,\big|\,|b^G|$，矛盾.

如果 $L\leqslant Z(G)$，即 L 中的元素可以和 G 中的任意元素交换，从而 L 中的元素可以和 a 交换，所以 $L\leqslant C_N(a)$. 又因 $P\leqslant C_N(a)$，因此有 $C_N(b)\leqslant C_N(a)$，则 $|a^N|\,\big|\,|b^N|$. 因 $(|a^G|,|b^G|)=1$，由引理 1 知 $|a^N|=1$，即 $N=C_N(a)$. 因为

$$a\in C_N(b)=P\times L$$

显然我们可假设 a 为 p -元. 对每一个 p' -元 $x\in N=C_N(a)$，有

$$C_G(ax)=C_G(a)\cap C_G(x)\leqslant C_G(a)$$

那么 $|a^G|\,\big|\,|(ax)^G|$，所以 $|(ax)^G|=n$. 又由 $C_G(ax)\leqslant C_G(a)$ 知 $C_G(ax)=C_G(a)$，因此

$$C_G(ax)=C_G(a)\leqslant C_G(x)$$

则有

$$x\in Z(C_N(a))=Z(N)$$

当然我们有 $x\in C_N(b)$，所以 $x\in L$，即 $C_N(a)$ 的 p' -部分均包含在 L 中. 所以 $N/N\cap Z(G)$ 为 p -群，从而 $N/N\cap Z(G)$ 为超可解群. 又因 $N\cap Z(G)\leqslant Z(N)$，从而 N 超可解，矛盾.

由以上讨论可得：$p\nmid m$.

步骤 5　我们可以假设 a 为 p' -元.

令 $a=a_pa_{p'}$，其中 a_p,$a_{p'}$ 分别为 a 的 p -部分和 p' -部分. 因

$$C_G(a)=C_G(a_pa_{p'})=C_G(a_p)\cap C_G(a_{p'})\leqslant C_G(a_p)$$

所以 $|a_p{}^G|\,\big|\,|a^G|$，则 $(|a_p{}^G|,m)=1$，由 M 的定义有 $a_p\in M$. 如果 $a_p\notin Z(G)$，由引理 4 有

$$p\in\pi(M/N\cap Z(G))\subseteq\pi(m)$$

矛盾. 所以 $a_p\in Z(G)$，则

$$C_G(a)=C_G(a_pa_{p'})=C_G(a_{p'})$$

因此，我们可以假设 a 为 p' -元.

步骤 6　$C_N(a)_p\leqslant Z(G)_p$.

假设存在一个非中心 p -元 $y\in C_N(a)$，则

$$C_G(ay)=C_G(a)\cap C_G(y)\leqslant C_G(a)$$

由定理 1 的假设，有 $C_G(ay)=C_G(a)$，即 $|(ay)^G|=|a^G|$，从而 $(|(ay)^G|,m)=1$，即 $ay\in M$. 因为 $a\in M$，所以 $y\in M$. 又因为 y 是 $C_N(a)$ 的 p -元，且 $y\notin Z(G)$，所以

$$p\in\pi(M/N\cap Z(G))\subseteq\pi(m)$$

与步骤 4 矛盾，所以 $C_N(a)_p\leqslant Z(G)_p$.

步骤 7　$C_N(a)\cap C_N(b)\leqslant Z(G)$，且 $Z(G)\cap N=Z(N)$.

如果存在非中心元 $y\in C_N(a)\cap C_N(b)$，下面分两种情况讨论：

当 $L\leqslant Z(G)$ 时，因为 $y\in C_N(b)$，那么我们可以假设 y 是 p -元，则 $y\in C_N(a)_p$，则由步骤 6 知

$y \in Z(G)_p$，矛盾.

当 $L \not\leq Z(G)$ 时，由步骤3知

$$y \in C_N(b) \leqslant Z(C_G(b))$$

那么由步骤1知 $C_G(y) = C_G(b)$，从而 $C_N(y) = C_N(b)$，所以

$$a \in C_N(y) = C_N(b) \leqslant Z(C_G(b))$$

从而 $C_G(b) \leqslant C_G(a)$，则 $|a^G| \,\big|\, |b^G|$，矛盾.

由以上讨论知

$$C_N(a) \cap C_N(b) \leqslant Z(G)$$

进而

$$C_N(a) \cap C_N(b) \leqslant Z(G) \cap N$$

又因

$$Z(N) \leqslant C_N(a) \qquad Z(N) \leqslant C_N(b)$$

所以 $Z(N) \leqslant C_N(a) \cap C_N(b)$，因此 $Z(N) \leqslant Z(G) \cap N$. 又显然有 $Z(G) \cap N \leqslant Z(N)$，所以

$$Z(G) \cap N = Z(N)$$

更进一步有

$$C_N(a) \cap C_N(b) = Z(N)$$

步骤8 极小阶反例不成立.

因为

$$\begin{aligned} &|a^N| = \\ &|N : C_N(a)| = |C_N(a)C_N(b) : C_N(a)| = \\ &|C_N(b) : C_N(a) \cap C_N(b)| = |C_N(b) : Z(N)| \end{aligned}$$

同理，

$$|b^N| = |C_N(a) : Z(N)| \qquad N = C_N(a)C_N(b)$$

则 $|N| = |a^N||b^N||Z(N)|$，所以 $|N/Z(N)| = |a^N||b^N|$. 由引理1知 $|a^N|$ 和 $|b^N|$ 互素，且无平方因子，从而 $N/Z(N)$ 为无平方因子群. 所以 $N/Z(N)$ 的所有共轭类长均无平方因子，因此 $N/Z(N)$ 为超可解群，从而 N 超可解，矛盾.

下证 $N/Z(N)$ 为 Frobenius 群. 由于 $N/Z(N)$ 不是素数幂阶群. 那么由引理5知 $N/Z(N)$ 是一个以交换群 $C_N(a)/Z(N)$ 为核，交换群 $C_N(b)/Z(N)$ 为补的 Frobenius 群，矛盾.

推论1 设 G 是有限群，假设 $m = |b^G| > |a^G| = n$ 是 G 的两个最长的非中心共轭类长，满足 $(m, n) = 1$ 且 m, n 均无平方因子，那么 G 超可解. 特别地，如果 $G/Z(G)$ 不是素数幂阶群，那么 $G/Z(G)$ 是 Frobenius 群.

证 令 $N = G$. 显然，N 满足定理1的假设. 因此，根据定理1，$N = G$ 是超可解的. 如果 $G/Z(G)$ 不是素数幂阶群，那么 $G/Z(G)$ 是 Frobenius 群.

参考文献：

[1] BIANCHI M, GILLIO A, CASOLO C. A Note on Conjugacy Class Sizes of Finite Groups [J]. Rend Sem Mat Univ Padova, 2001, 106: 255－260.

[2] BELTRÁN A, FELIPE M J. Certain Relations Between p-Regular Class Sizes and the p-Structure of p-Solvable Groups [J]. J Austral Math Soc, 2004, 77: 387－400.

[3] ZHAO Xian-he, CHEN Gui-yun, SHI Jiao-yun. On the Normal Subgroup with Coprime G-Conjugacy Class Sizes [J].

Proc Indian Acad Sci，2011，121(4)：397－404.

[4] 徐明曜，黄建华，李世荣. 有限群导引(下)[M]. 北京：科学出版社，1999：1－409.

[5] CHILLAG D，HERZOG M. On the Length of the Conjugacy Classes of Finite Groups [J]. J Algebra，1990，131(1)：110－125.

[6] LU Zi-qun，ZHANG Ji-ping. On the Diameter of a Graph Related to Pregular Conjugacy Classes of Finite Groups [J]. J Algebra，2000，231(2)：705－712.

[7] ZHAO Xian-he，QU Hai-peng，CHEN Gui-yun. Coprime G-Conjugacy Class Sizes on the Normal Subgrous [J]. Acta Math Sinica，2014，30(9)：1588－1594.

[8] BEAR R. Group Elements of Prime Power Index [J]. Trans Amer Math Soc，1953，75：20－47.

[9] 游兴中，钱国华. 一类和有限群的共轭类关联的新图 [J]. 数学年刊：A 辑，2007，28(5)：631－636.

[10] ZHANG Ji-ping. Finite Groups with Many Conjugate Elements [J]. J Algebra，1994，170(2)：608－624.

[11] 赵先鹤，左红亮，陈贵云. 正规子群中某些 p-A-正则元的 G -共轭类长 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(4)：104－108.

[12] 杜祥林. 关于群的阶与群的共轭类数的商 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2004，29(2)：159－162.

On the Arithmetical Property About the Two Longest G-Conjugacy Class Sizes

ZHAO Xian-he，　GENG Xu-xu，　WANG Yan-li

College of Mathematics and Information Science，Henan Normal University，Xinxiang Henan 453007，China

Abstract：Let N be a normal subgroup of a finite group G，and the integers m and n be the two longest G-conjugacy classes of N. This paper describes the structure of N and proves that N is a supersoluble group under the condition that both m and n are square free and coprime.

Key words：normal subgroup；conjugacy class size；square free；supersoluble group

责任编辑　廖　坤