文章编号：1000－5471(2008)05－0048－03

SOR 最优松弛因子选取方法研究[①]

胡　枫[1]，　金远平[2]

1. 青海师范大学 计算机系，西宁 810008；2. 东南大学 计算机科学与工程系，南京 211189

摘要： 提出了直接利用计算机确定最优松弛因子的 3 种方法，并通过实例验证了算法的可行性和有效性.

关　键　词： 线性方程组；SOR 迭代法；最优松弛因子

中图分类号：TP301.6　　　　**文献标识码：A**

如何选取 *SOR* 算法[1] 中的松弛因子 ω，一直以来是数值代数中的一个理论难题. 目前只有在系数矩阵具有少数特殊类型的情况下，才能通过数学公式确定松弛因子，根据文献[2－3]，当系数矩阵 A 具有相容次序时，SOR 迭代解法中的最优松弛因子 ω_{opt} 与相应的 Jacobi 谱半径 $\rho(J)$ 的关系是

$$\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J)}} \tag{1}$$

但谱半径仍是未知，且通过公式 1 求 ω_{opt} 仍有一定难度. 因而研究如何在计算机上通过算法求松弛因子是件很有意义的工作.

求解方程组 $Ax = b$ 的 SOR 迭代公式[1] 为：

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\left(\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}\right)(i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{2}$$

当 $0 < \omega < 1$ 时，迭代公式(2) 为低松弛方法；$\omega > 1$ 时，迭代公式(2) 为超松弛迭代方法(over-relaxation method)[3].

SOR 迭代方法中松弛因子 ω 的取值直接影响到算法的收敛性及收敛速度. ω 选择得当，可以加快收敛速度，甚至可以使发散的迭代变成收敛. 因此，参数 ω 的选取是 SOR 方法能否成功的关键. 为了保证迭代过程的收敛，必须要求 $0 < \omega < 2$，而对超松弛法取 $1 < \omega < 2$. 本文在对已有算法[4-5] 进行研究的基础上，针对超松弛迭代法松弛因子的选取提出了 3 种简便实用的，且能够直接利用计算机确定最优松弛因子的算法，并通过实例验证了算法的可行性和有效性.

1　松弛因子 ω 的选取方法

1.1　二分比较法

将松弛因子 ω 的区间(1，2) 进行二分，每个小区间的长度为 1/2，ω 取区间中点值 3/2，按照公式(2) 迭代，求出迭代次数 k. 如果 k 不超过指定的发散常数，则可确定 ω 的值；否则将(1，2) 区间四等分，每个小区间的长度为 1/4，ω 取各分点的值，继续迭代. 一般地，将区间(1，2) 二分 M 次，每次二分步长为 $\frac{1}{2^M}$，ω 依次取各二分点的值，按照迭代公式(2) 迭代，并求出迭代次数 k 值. 如果 k 值不超过指定的发散常数，则可确定 ω 的值，这样总能找到一个不超过指定发散常数的 ω 值. 算法描述如下：

步骤 1　给定发散常数 RADIATION 的值，令二分次数 M 的初始值为 1；

---

① 收稿日期：2007－10－11
基金项目：国家自然科学基金重大研究资助项目(90412014).
作者简介：胡　枫(1969－)，女，青海民和县人，副教授，主要从事算法分析与研究.

步骤 2　将区间(1，2) 二分 M 次，每次二分的步长为$\frac{1}{2^M}$，ω 取各二分点的值；

步骤 3　对每一个二分点按照公式(2) 迭代求出迭代次数 K；

步骤 4　比较各二分点的 K 值找出最少迭代次数的 $K_{\min}$ 值；

步骤 5　判断若 $K_{\min}$ 小于 RADIATION，则结束；否则二分次数 M ++，转步骤 2 继续二分.

1.2　逐步搜索法

将 ω 的取值区间(1，2) 进行 M 等分，ω 分别取 $1+\frac{1}{M}$，$1+\frac{2}{M}$，…，$1+\frac{M-1}{M}$. 通过迭代公式(2) 依次对同一个精度要求求出迭代次数 k 的值，并从中选出最优松弛因子 ω 的值. 算法描述如下：

步骤 1　给定等分数 M 和精度要求 ε 的值，令 ω 的初始值为 1；

步骤 2　令 $p=1, 2, \cdots, M-1$，重复步骤 3 - 5；

步骤 3　$\omega_p = 1+\frac{p}{M}$；

步骤 4　按照如下公式迭代

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega_p)x_i^{(k)} + \omega_p\left(\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}\right)\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{3}$$

找出符合精度要求 ε 的迭代次数 K_p；

步骤 5　比较找出 K_p 值最小的 ω_p 为最优松弛因子 ω_{opt} 值.

1.3　黄金分割法

依据黄金分割法的思想，通过计算机自动选取最优松弛因子的近似值，算法描述如下：

步骤 1　对(1，2) 区间第一次 0.618 的分割，区间边界 $a_1=1$，$b_1=2$，在(a_1，b_1) 区间分割出黄金点 $\mathrm{point}_1 = a_1 + 0.618(b_1 - a_1)$，进行 SOR 法的迭代，求出迭代次数 K 值. 如果迭代次数没有超出规定的发散常数，迭代结束，否则转步骤 2.

步骤 2　在(1，1.618) 和(1.618，2) 之间进行第二次的黄金分割，找出分割点 $\mathrm{point}_2 = a_2 + 0.618(b_2 - a_2)$，其中 a_2 和 b_2 是新分割区间的左右边界. 找出迭代次数最少的 ω. 若发散则改变区间继续进行黄金分割.

2　实例及迭代比较

例：用超松弛迭代法求解下列线性方程组的解. 当 $\max|\Delta x_i| = \max|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-6}$，($i=1, \cdots, 4$) 时迭代终止，方程组的精确解为 $x^* = (1, -2, -1, 3)^T$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解法 1：松弛因子 ω 的选取采用第一种二分比较法，算法结果如表 1 所示.

表 1　二分比较法选取松弛因子的结果

二分次数 M	松弛因子 ω	迭代次数 K	$\max\lvert\Delta x_i\rvert$
1	1.500	24	9.537×10^{-7}
	1.250	12	3.576×10^{-7}
2	1.500	24	9.537×10^{-7}
	1.750	73	8.345×10^{-7}

表 1 可知最优松弛因子 $\omega_{\mathrm{opt}} = 1.250$.

解法 2：松弛因子 ω 的选取采用第二种逐步搜索法，算法结果如表 2 所示.

表 2 逐步搜索法选取松弛因子的结果

等分数 M	松弛因子 ω	迭代次数 K	$\max\|\Delta x_i\|$
2	1.500	24	9.537×10^{-7}
3	1.333	15	3.576×10^{-7}
	1.667	45	8.345×10^{-7}
4	1.250	12	3.576×10^{-7}
	1.500	24	9.537×10^{-7}
	1.750	73	8.345×10^{-7}

从表 2 中可知 $M=2$ 时最优松弛因子 $\omega_{opt}=1.500$，$M=3$ 时 $\omega_{opt}=1.333$，$M=4$ 时 $\omega_{opt}=1.250$.

解法 3：松弛因子 ω 的选取采用第三种黄金分割法，算法结果如表 3 所示.

表 3 黄金分割法选取松弛因子的结果

分割次数 M	松弛因子 ω	迭代次数 K	$\max\|\Delta x_i\|$
1	1.618	36	9.537×10^{-7}
2	1.382	14	6.557×10^{-7}
	1.854	100	3.256×10^{-3}
3	1.236	12	2.980×10^{-7}
	1.528	27	8.345×10^{-7}
	1.764	85	7.153×10^{-7}

从表 3 可知 $\omega_{opt}=1.236$.

3 结 论

提出了二分比较法、逐步搜索法和黄金分割法等直接利用计算机查找最优松弛因子的方法，并通过实例验证了算法的可行性和有效性. 实例表明这 3 种方法都可以得到迭代次数为 12 的松弛因子，但二分比较法更快捷，它通过 2 次二分就搜索到最优松弛因子. 使用时可以根据收敛的需要，不断修改发散常数，找出符合要求的最优松弛因子的值.

参考文献：

[1] Young D M. Iterative Solutions of Large Linear Systems [M]. New York: Academic Press, 1971: 101－139.

[2] Varga R S. P-cyclic matrices: A generalization of the Yong-Frankel SOR scheme [J]. pacific J. Math, 1959, 9: 617－628.

[3] 现代应用数学手册编委会编. 现代应用数学手册(计算与数值分析卷)[M]. 北京：清华大学出版社，2005，1：369－379.

[4] 杨本立，曾宪雯，李安志. 带状方程组二叉树 MIMD 算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2004，29(1)：29－34 .

[5] 李春光，徐成贤. 确定 SOR 最优松弛因子的一个实用算法 [J]. 计算力学学报，2002，19(3)：299－302.

Research on the Selection of the Optimal Relaxation Factor for SOR Method

HU Feng[1], JIN Yuan-ping[2]

1. Department of computer Qinghai Normal University, Xining 810008, China;

2. School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China

Abstract: Studies the numeric algorithm for this problem intensively, developing three methods to determine the optimal relaxation factor for SOR with computer directly. Furthermore, the feasibility and validity of these methods was verified through experiment instances and made it possible to execute SOR algorithm more efficiently.

Key words: linear equations; SOR iterated algorithm; optimal relaxation factor

责任编辑 张 枸