文章编号:1000-5471(2008)05-0043-05

半线性热方程解的支集的瞬间收缩性质①

张景军[1], 李宏杰[1,2], 马宗蔚[1]

1. 嘉兴学院 数学与信息工程学院数学系,浙江 嘉兴 314001;
2. 东华大学 信息科学与技术学院,上海 200051

摘要: 对带有强吸收项的半线性热方程的解作了研究,当初值在无穷远处消失时讨论了解的支集的瞬间收缩性质,并得出了强吸收项与初值之间的具体依赖关系.

关 键 词: 强吸收项;支集的瞬间收缩性;半线性热方程

中图分类号: O175.26 **文献标识码:** A

考虑如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + b(x,t)\,|\,u\,|^{p-1}u = 0 & (x,t) \in R^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 & x \in R^N \end{cases} \tag{1}$$

其中:$0 < p < 1$,$b(x,t) \geqslant 0$. 称 $b(x,t)\,|\,u\,|^{p-1}u$ 为强吸收项. 可以证明,当 $u_0(x) \in C(R^N) \cap L^\infty(R^N)$,$b(x,t) \in C(R^N \times [0,+\infty))$ 时,上述 Cauchy 问题存在惟一解 $u(x,t)$,且 $0 \leqslant u(x,t) \leqslant \sup\limits_{R^N} u_0(x)$. 本文主要研究当初值 $u_0(x)$ 在无穷远处消失时,问题(1)非负解的支集的瞬间收缩性质. 首先给出解的支集的瞬间收缩性定义.

定义 设非负函数 $u(x,t) \in C(R^N \times [0,T])$. 令 $\zeta(t;u) = \sup\{|\,x\,|;\,u(x,t) > 0\}$,如果 $\zeta(0;u) = +\infty$,且 $\exists\,\tau > 0(\tau \leqslant T)$,$s.t.\ \zeta(t;u) < +\infty$,$\forall\, t \in (0,\tau]$,则称函数 $u(x,t)$ 的支集具有瞬间的收缩性质,简称为 $u(x,t)$ 具有 ISS 性质.

当 $u(x,t)$ 具有 ISS 性质时,由上述定义可知,尽管 $t=0$ 时初始数据 $u_0(x)$ 的支集可允许为整个空间,但是在任一小的时刻 t,解 $u(x,t)$ 关于空间变量的支集 $\mathrm{supp}\,u(\cdot,t)$ 总是有界的,即解 $u(x,t)$ 的支集在一瞬间内就收缩起来了.

关于解的性质的研究,多数文献都讨论解的爆破性质[1-2],而对解的 ISS 性质的研究则较少[3-7]. 这类文献主要研究给定初值 $u_0(x)$,为使问题(1)的解具有 ISS 性质强吸收项的系数 $b(x,t)$ 应满足的条件. 当初值 $u_0(x)$ 在无穷远处消失时,文献[3]和[4]分别得到了结论 1 和结论 2.

结论 1 如果 $0 < p < 1$,$b(x,t) \equiv \lambda > 0$,初值 $u_0(x)$ 满足:

$$\lim_{|x| \to \infty} u_0(x) = 0 \tag{2}$$

则 Cauchy 问题(1)的解具有 ISS 性质.

结论 2 如果 $0 < p < 1$,初值 $u_0(x)$ 和系数 $b(x,t)$ 分别满足如下条件:

$$0 < u_0(x) \leqslant \frac{c_0}{(1+|\,x\,|^2)^\gamma} \qquad c_0 > 0,\ \gamma > 0 \tag{3}$$

---

① 收稿日期:2007-09-17
基金项目:嘉兴学院科研重点课题资助项目(70107003).
作者简介:张景军(1981-),男,浙江东阳人,博士研究生,主要从事偏微分方程研究.

$$b(x,t) \geqslant \frac{b_0}{(1+|x|^2)^\beta} \qquad b_0>0,\ \beta>0 \tag{4}$$

又假设 $\beta<\gamma(1-p)$，则 Cauchy 问题(1) 的解具有 ISS 性质.

如果初值 $u_0(x)$ 是具有紧支集的连续函数时则条件(2) 成立，因此由结论 1 可知，(1) 的解具有 ISS 性质(此时系数 $b(x,t)$ 应是正的常值函数)，此时解的支集的扰动速度是有限的. 另外，众所周知，热传导问题(即在(1) 中取 $b(x,t)\equiv 0$) 的解的支集具有无限扰动的性质，问题(1) 的解的支集之所以会有瞬间收缩性质，是因为它比热传导问题多了一项强吸收项 $b(x,t)u^p$，而且利用下面的引理1可以证明系数 $b(x,t)$ 越大则相应的解就越小. 因此解的 ISS 性质的产生可以说是有强吸收项作用时产生的一种特殊现象.

根据结论 1，如果初值 $u_0(x)$ 满足条件(3)，则 $b(x,t)\equiv\lambda>0$ 这个条件就足以保证问题(1) 的解具有 ISS 性质. 然而，结论 2 却表明为使(1) 的解具有 ISS 性质，条件 $b(x,t)\equiv\lambda>0$ 太强了，可以将它减弱为条件(4). 条件(4) 允许系数 $b(x,t)$ 在 $|x|\to\infty$ 时以某种衰减速度趋于零. 因此，从结论 1 和结论 2 中可以看到，为使(1) 的解具有 ISS 性质，系数 $b(x,t)$ 和初值 $u_0(x)$ 有着一定的依赖关系.

利用比较原理是证明解的ISS性质的一种常用方法. 为得到本文的主要结果(定理1和定理2)，先给出以下比较原理.

引理 1 设有界函数 $u, v\in C(R^N\times[0,+\infty))\cap C^{2,1}(R^N\times(0,+\infty))$ 满足

$$\begin{cases} Lu\leqslant Lv & (x,t)\in R^N\times(0,+\infty) \\ u(x,0)\leqslant v(x,0) & x\in R^N \end{cases}$$

其中 $Lu\equiv u_t-\Delta u+b(x,t)f(u)$，这里 $f: R\longrightarrow R$ 为一连续的增函数，$b(x,t)\geqslant 0$. 则有

$$u(x,t)\leqslant v(x,t),\ (x,t)\in R^N\times[0,+\infty)$$

引理 2 设 Lu，f，$b(x,t)$ 同引理1，又假设有界函数 $u, v\in C((R^N\backslash B_n)\times[0,+\infty))\cap C^{2,1}((R^N\backslash\overline{B_n})\times(0,+\infty))$ 满足：

$$\begin{cases} Lu\leqslant Lv & (x,t)\in(R^N\backslash\overline{B_n})\times(0,+\infty) \\ u(x,t)\leqslant v(x,t) & (x,t)\in\partial B_n\times[0,+\infty) \\ u(x,0)\leqslant v(x,0) & x\in R^N\backslash\overline{B_n} \end{cases}$$

则有

$$u(x,t)\leqslant v(x,t),\ (x,t)\in(R^N\backslash B_n)\times[0,+\infty)$$

这两个比较原理都是对相应的线性方程的比较原理的推广，可以采用文献[8] 中第四章定理 6.1 和定理 6.2 中对线性抛物型方程的证明方法来证明.

利用引理 1 和引理 2，本文就问题(1) 的解的 ISS 性质作了两个方面的工作：一是在初值 $u_0(x)$ 具有紧支集的条件下，对结论 1 作了改进得出定理 1；二是在初值 $u_0(x)$ 满足如下条件时：

$$0<u_0(x)\leqslant f(r)\longrightarrow 0\ (r=|x|\longrightarrow+\infty) \tag{5}$$

即要求初值函数只是一般地趋于零时，对结论 2 作了改进，得出定理 2.

定理 1 设 $0<p<1$，初值 $u_0(x)$ 和系数 $b(x,t)$ 分别满足：

$$0\leqslant u_0(x)\leqslant(a^2-|x|^2)_+^{\frac{2}{1-p}} \tag{6}$$

$$b(x,t)\geqslant b_0(l^2-|x|^2)_+ \tag{7}$$

其中：$a, b_0>0$；$l\geqslant\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{(1-p)b_0}+\frac{c}{b_0}\right)a^2}\left(c=\frac{8(1+p)}{(1-p)^2}\right)$. 则 Cauchy 问题(1) 的解 $u(x,t)$ 具有 ISS 性质，且有 $\zeta(t;u)\leqslant a$，而且存在 $T>0$，使得当 $t\geqslant T$ 时，$u(x,t)\equiv 0\ (\forall x\in R^N)$.

证 作一辅助函数

$$v(x,t)=(a^2-|x|^2)_+^{\frac{2}{1-p}}(T-t)_+^{\frac{1}{1-p}} \tag{8}$$

其中 $T\geqslant 1$ 为待定常数. 当 $T\geqslant 1$ 时，由(6) 得

$$u(x,0)\leqslant v(x,0) \qquad x\in R^N \tag{9}$$

因为 $0<p<1$，所以 $v(x,t)\in C(R^N\times[0,+\infty))\cap C^{2,1}(R^N\times(0,+\infty))$. 由(8)知当 $|x|\geqslant a$，$t\geqslant T$ 时，$v(x,t)=0$，所以有

$$v_t-\Delta v+b(x,t)v^p=0,\ |x|\geqslant a,\ t\geqslant T \tag{10}$$

而当 $(x,t)\in B_a\times(0,T)$ 时，利用(7)式计算有

$$\begin{aligned}v_t-\Delta v+b(x,t)v^p=&-\frac{1}{1-p}(a^2-|x|^2)^{\frac{2}{1-p}}(T-t)^{\frac{p}{1-p}}-\\&\frac{8(1+p)}{(1-p)^2}(a^2-|x|^2)^{\frac{2p}{1-p}}|x|^2(T-t)^{\frac{1}{1-p}}+\frac{4N}{1-p}(a^2-|x|^2)^{\frac{1+p}{1-p}}(T-t)^{\frac{1}{1-p}}+\\&b(x,t)(a^2-|x|^2)^{\frac{2p}{1-p}}(T-t)^{\frac{p}{1-p}}\\\geqslant&(a^2-|x|^2)^{\frac{2p}{1-p}}(T-t)^{\frac{p}{1-p}}\Big[-\frac{1}{1-p}(a^2-|x|^2)^2-\frac{8(1+p)}{(1-p)^2}|x|^2(T-t)+\\&\frac{4N}{1-p}(a^2-|x|^2)(T-t)+b_0(l^2-|x|^2)\Big]\\\geqslant&(a^2-|x|^2)^{\frac{2p}{1-p}}(T-t)^{\frac{p}{1-p}}\Big[-\frac{a^4}{1-p}-\frac{8(1+p)}{(1-p)^2}a^2T+b_0(l^2-a^2)\Big]\end{aligned} \tag{11}$$

其中最后一个不等式是因为 $\frac{4N}{1-p}(a^2-|x|^2)(T-t)$ 非负，故将该项略去，同时注意到 $0\leqslant|x|\leqslant a$，$T-t$ 放大到 T.

因为 $l\geqslant\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{(1-p)b_0}+\frac{c}{b_0}\right)a^2}\left(c=\frac{8(1+p)}{(1-p)^2}\right)$，所以存在 $T\geqslant1$，使得 $-\frac{a^4}{1-p}-\frac{8(1+p)}{(1-p)^2}a^2T+b_0(l^2-a^2)\geqslant0$，所以由(11)可得

$$v_t-\Delta v+b(x,t)v^p\geqslant0,\ (x,t)\in B_a\times(0,T) \tag{12}$$

联合(10)和(12)得

$$v_t-\Delta v+b(x,t)v^p\geqslant0,\ (x,t)\in R^N\times(0,+\infty) \tag{13}$$

再利用(9)和(13)式，由引理1知

$$u(x,t)\leqslant v(x,t),\ (x,t)\in R^N\times[0,+\infty)$$

利用上式，注意到 $v(x,t)$ 的特殊取法，即可推出定理1所需的结论.

注　当初值具有紧支集时，必存在 $a>0$ 使得条件(6)成立. 定理1不仅表明了解 $u(x,t)$ 的支集 $\mathrm{supp}u(\cdot,t)$ 不会超出初值 $u_0(x)$ 的支集，而且由解在有限时间后取值为零这条性质，甚至可以猜测支集 $\mathrm{supp}u(\cdot,t)$ 关于 t 是单调收缩的.

定理1表明在初值函数具有紧支集的条件下，为保证(1)的解具有ISS性质，允许系数 $b(x,t)$ 在 $|x|$ 很大时取值为零，改进了结论1中的相应结果.

定理2　设 $0<p<1$，初值 $u_0(x)$ 满足条件(5)，系数 $b(x,t)$ 满足

$$b(x,t)\geqslant b_0f^\beta(r)(b_0>0) \tag{14}$$

其中 β 满足

$$0<\beta<(1-p) \tag{15}$$

又假设衰减函数 $f\in C^2(R)$ 且满足

$$\lim_{r\to\infty}f^{-1-\beta-p}(f')^2=0 \tag{16}$$

$$\lim_{r\to\infty}f^{-\beta-p}f''=0 \tag{17}$$

则Cauchy问题(1)的解具有ISS性质.

证　作一辅助函数

$$v(x,t)=2f(r)(1-tf^{-\delta}(r))_+^\omega \tag{18}$$

其中：$0<\delta<(1-p)-\beta$，$\omega=\frac{2}{1-p}$. 因为 $0<p<1$，所以 $v(x,t)\in C(R^N\times[0,+\infty))\cap C^{2,1}(R^N$

$\times(0, +\infty))$. 下面证明 $\exists\tau>0$, 使得

$$u(x,t)\leqslant v(x,t),\ (x,t)\in R^N\times[0,\tau] \tag{19}$$

记 $A(x,t)=1-tf^{-\delta}(r)$, $E_+=\{(x,t)\in R^N\times(0,+\infty); A(x,t)>0\}$, $Q_n=\{(x,t)\in R^N\times(0,+\infty); |x|\geqslant n\}$. 当 $(x,t)\in Q_n\backslash E_+$ 时, $v(x,t)=0$, 有

$$v_t-\Delta v+b(x,t)v^p=0,\ (x,t)\in Q_n\backslash E_+ \tag{20}$$

而在 $Q_n\cap E_+$ 上, 有

$$v_t=-2\omega f^{1-\delta}A^{\omega-1} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}-\Delta v=&-2f''A^{\omega}-2\omega\delta(tf^{-\delta})A^{\omega-1}f^{-1}(f')^2\\&-2A^{\omega}f'\frac{N-1}{r}-2\omega(\omega-1)\delta^2A^{\omega-2}(tf^{-\delta})^2f^{-1}(f')^2\\&+2\omega\delta^2A^{\omega-1}(tf^{-\delta})f^{-1}(f')^2\\&-2\omega\delta A^{\omega-1}(tf^{-\delta})f''\\&-2\omega\delta A^{\omega-1}(tf^{-\delta})f'\frac{N-1}{r}\end{aligned}$$

在 $-\Delta v$ 的表达式中, 第5项为正, 将此项略去. 另外注意到在 E_+ 上, 有 $0<tf^{-\delta}<1$, 所以将第2,4,6,7项中的 $tf^{-\delta}$ 放大到1, 则有

$$\begin{aligned}-\Delta v\geqslant&-2f''A^{\omega}-2\omega\delta f^{-1}(f')^2\\&-2A^{\omega}f'\frac{N-1}{r}-2\omega(\omega-1)\delta^2A^{\omega-2}f^{-1}(f')^2\\&-2\omega\delta A^{\omega-1}|f''|-2\omega\delta A^{\omega-1}|f'|\frac{N-1}{r}\end{aligned} \tag{22}$$

由定理的条件(14), 可得

$$b(x,t)v^p\geqslant 2^pb_0f^{\beta+p}A^{\omega p} \tag{23}$$

联合(21)-(23), 可推出

$$\begin{aligned}&v_t-\Delta v+b(x,t)v^p\\\geqslant&f^{\beta+p}A^{\omega p}[2^pb_0-2\omega A^{\omega(1-p)-1}f^{1-\delta-\beta-p}\\&-2A^{\omega(1-p)}f^{-\beta-p}f''-2\omega\delta A^{\omega(1-p)-1}f^{-1-\beta-p}(f')^2\\&-2A^{\omega(1-p)}f^{-\beta-p}f'\frac{N-1}{r}-2\omega(\omega-1)\delta^2A^{\omega(1-p)-2}f^{-1-\beta-p}(f')^2\\&-2\omega\delta A^{\omega(1-p)-1}f^{-\beta-p}|f''|-2\omega\delta A^{\omega(1-p)-1}f^{-\beta-p}|f'|\frac{N-1}{r}]\end{aligned} \tag{24}$$

注意到 $\omega(1-p)=2$, $0<A<1((x,t)\in E_+)$ 和 $1-\delta-\beta-p>0$ 及条件(16)和(17)(条件(16)蕴含着 $\lim\limits_{r\to\infty}f^{-\beta-p}f'=0$), 根据这些信息可知(24)的中括号里负的那些项是趋于零的(当 $r\to\infty$ 时), 所以可以取定 n 充分大, 由(24)可推出

$$v_t-\Delta v+b(x,t)v^p\geqslant 0,\ (x,t)\in Q_n\cap E_+ \tag{25}$$

联合(20)和(25)就可以得到

$$v_t-\Delta v+b(x,t)v^p\geqslant 0,\ (x,t)\in Q_n \tag{26}$$

根据(5)和(18)可知,

$$u(x,0)<v(x,0),\ x\in R^N \tag{27}$$

因为 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 都是连续函数, 所以对于取定的 n, 由(27)式知必然存在 $\tau>0$, 使得

$$u(x,t)\leqslant v(x,t),\ (x,t)\in B_n\times[0,\tau] \tag{28}$$

联合(26)-(28), 利用引理2得到

$$u(x,t)\leqslant v(x,t),\ (x,t)\in(R^N\backslash B_n)\times[0,\tau]$$

再联合(28)式, 就得到所需的(19)式. 于是, 固定 $t_0\in(0,\tau]$, 由 $v(x,t)$ 的特殊构造知, 当 $|x|$ 充分大

时，必有 $v(x, t_0) = 0$，从而由(19) 知当 $|x|$ 充分大时，也必有 $u(x, t_0) = 0$，这就意味着 $\zeta(t_0; u) < +\infty$. 于是由定义可知，解 $u(x, t)$ 就具有 ISS 性质. 定理 2 证毕.

可以验证，像 $f(r) = \dfrac{1}{P_n(r)}$，$f(r) = \mathrm{e}^{-P_n(r)}$ (其中 $P_n(r)$ 是首项系数为正的多项式函数) 等类型的衰减函数都满足(16) 和(17) 式，因而定理 2 推广了结论 2 中的相应结果.

最后需要指出，当初值 $u_0(x)$ 满足条件(5) 时，为使 Cauchy 问题(1) 的解具有 ISS 性质，定理 2 给出了 $b(x, t)$ 应该满足的一个条件，即(14) 和(15)，然而是否存在更弱的条件，还有待作进一步的研究.

致谢：审稿专家对本文提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢！

参考文献：

[1] 王玉兰，宋小军，张　岩. 一类反应扩散方程组的解的爆破 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2006，31(5)：43－46.

[2] 李中平，王雄瑞，周　军. 一类带有局部化源的反应扩散方程组解的整体存在性及爆破 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2007，32(3)：15－18.

[3] Evans L C，Knerr B F. Instantaneous Shrinking of the Support of Nonnegative Solutions to Certain Nonlinear Parabolic Equations and Variational Inequalities [J]. Illinois J Math，1979，23：153－166.

[4] Kersner R，Nicolosi F. The Nonlinear Heat Equation with Absorption：Effects of Variable Coefficients [J]. J Math Anal Appl，1992，170：551－566.

[5] Kalashnikov A S. Instantaneous Shrinking of the Support for Solutions to Certain Parabolic Equations and Systems [J]. Rend Mat Accad Lincei，1997，8(9)：263－272.

[6] Kersner R，Shishkov F. Instantaneous Shrinking of the Support of Energy Solutions [J]. J Math Anal Appl，1996，198：729－750.

[7] Li Junjie. Qualitative Properties for Solutions of Semilinear Heat Equations with Strong Absorption [J]. J Math Anal Appl，2003，281：382－394.

[8] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程 [M]. 北京：北京大学出版社，2003.

Large Instantaneous Shrinking of the Support for Solutions to Certain Semilinear Heat Equations

ZHANG Jing-jun[1]，　LI Hong-jie[1,2]，　MA Zong-wei[1]

1. College of Mathematics and Information Engineering，Jiaxing University，Zhejiang 314001，China；

2. College of Information Science and Technology，Donghua University，Shanghai 200051，China

Abstract：This paper considers the solution of the Cauchy problem to certain semilinear heat equations with strong absorption，presents a discussion of shrinking property of the support of the solution with the initial data which vanishes at infinity，and gets the relationship between the initial data and the strong absorption.

Key words：strong absorption；instantaneous shrinking of the support；semilinear heat equation

责任编辑　张　枸