文章编号：1000-5471(2008)05-0039-04

关于序列紧空间上连续自映射的 ω-极限点①

唐晓弦， 朱培勇

电子科技大学 应用数学学院，成都 610054

摘要： 在一般拓扑空间上研究拓扑动力系统的轨道渐近性质. 证明了以下结果：设 X 是序列紧空间，f 是 X 上的连续自映射，点 x 的 ω-极限集 $\omega(x, f)$ 为有限集当且仅当它是 f 的一个周期轨. 作为推论，在紧空间和可数紧空间中也有完全相同的结果.

关 键 词： ω-极限点；序列紧空间；连续自映射；周期轨

中图分类号：O189.11 **文献标识码：A**

连续自映射的周期点集、回归点集、ω-极限点集及其相关性质是拓扑动力系统研究的重要内容之一. 关于这些点集的研究，20 世纪 80 年代，文献[1-3]在实线段上连续自映射的研究中作出了重要贡献. 1993 年，文献[4]将实线段推广为一种称为树的特殊偏序集. 此后，文献[5,6]对连续树映射的动力系统行为进行研究，得到了一些很好的性质. 随着动力系统的研究向高维空间和抽象空间方面不断延伸，人们已经想到：在一般拓扑空间上引入动力系统的概念并研究其各种性质(参见文献[7]). 人们已经获得的实线段上连续自映射和连续树映射的动力系统性质哪些能够推广到一般拓扑空间的连续自映射呢？

本文就上述问题进行一些讨论，首先在文献[7]的基础上补充定义一般拓扑空间上连续自映射的回归点、ω-极限点等概念. 然后，利用点集拓扑学的方法与技巧，在列紧空间中证明了如下结果：

定理 1 设 X 是一个序列紧空间，f 是 X 上的连续自映射并且 $x \in X$，则点 x 关于 f 的 ω-极限集 $\omega(x, f)$ 为非空有限集当且仅当它是 f 的一个周期轨.

定理 1 正是文献[1]的定理 17.1 和文献[2]的定理 3 在一般拓扑空间中的推广. 因此，作为这定理的推论，不难得知，在紧度量空间和可数紧的度量空间中有完全相同的结果.

本文用 X 表示拓扑空间，简称空间. $N(x)$ 表示点 x 的开邻域系，$\overline{\omega(x, f)}$ 表示 $\omega(x, f)$ 关于空间 X 的闭包. 当映射 $f: X \longrightarrow X$ 是一个连续映射时，称 f 为 X 上的一个连续自映射. 并且用 $f^2(x)$ 表示 $f(f(x))$，$f^3(x)$ 表示 $f(f^2(x))$，…，$f^n(x)$ 表示 $f(f^{n-1}(x))$. 特别地，$f^0(x) = x$，即 f^0 表示空间 X 上的恒等映射. 在整个文章中，所涉及到的空间都假设是 Hausdorff 空间(即 T_2 空间).

首先在文献[7]中的定义的基础上，补充定义周期轨、回归点、ω-极限点等概念.

定义 1[7] 设 $x \in X$，f 是空间 X 上的一个连续自映射，点 x 称为是 f 的一个周期点，如果存在 $n \in \mathbf{N}$，使得 $f^n(x) = x$；设 $n \in \mathbf{N}$，点 x 称为是 f 的一个 n-周期点，如果 $f^n(x) = x$，但 $f^k(x) \neq x$，这里 $k = 1, 2, \cdots, n-1$；称 $\{f^k(x) \mid k = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 为 f 的 n-周期轨，如果点 x 是 f 的一个 n-周期点.

定义 2 设 f 是空间 X 上的一个连续自映射，点 x 称为是 f 的一个回归点，如果 $\forall U \in \mathbf{N}(x)$，存在 $n \in \mathbf{N}$，使得 $f^n(x) \in U$.

定义 3 设 f 是空间 X 上的一个连续自映射，点 $y \in X$ 称为点 $x \in X$ 关于 f 的一个 ω-极限点，如果序列 $x, f(x), f^2(x), \cdots$ 有一个子序列 $f^{m_1}(x), f^{m_2}(x), \cdots$ 收敛于点 y. 点 $x \in X$ 关于 f 的全体 ω-极限

① 收稿日期：2008-03-26

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10671134).

作者简介：唐晓弦(1985-)，女，四川达州人，硕士研究生，主要从事混沌理论与拓扑动力系统的研究.

点构成的集合记为 $\omega(x, f)$.

为了证明上面的主要定理，我们先证明下面几个引理.

引理 1 若空间 X 是序列紧空间，f 是 X 上的一个连续自映射，$x \in X$，且 x 的 ω-极限集 $\omega(x, f)$ 非空，则

(1) $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$;

(2) $\forall n \in \mathbf{N}$，$f(\omega(x, f^n)) = \omega(f(x), f^n)$;

(3) $\forall n \in \mathbf{N}$，$\omega(x, f) = \bigcup_{i=1}^{n} \omega(f^i(x), f^n)$.

证 (1) 对于 $\forall y \in f(\omega(x, f))$，存在 $z \in \omega(x, f)$，使 $f(z) = y$. 因为有 $\{f^n(x)\}$ 的子列 $f^{n_k}(x) \to z$，由 f 在点 z 的连续性，则 $f^{n_k+1}(x) \to f(z) = y$. 从而，$y \in \omega(x, f)$.

另一方面，对于 $\forall y \in \omega(x, f)$，存在子列 $f^{n_k}(x) \to y$. 由 X 序列紧性，序列 $\{f^{n_k-1}(x)\}$ 有一个收敛子列 $\{f^{n_{k_j}-1}(x)\}$ 收敛于一点 z，则 $z \in \omega(x, f)$ 并且 $f(z) = y$. 故 $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$.

(2) 对固定的 $n \in \mathbf{N}$，$\forall y \in f(\omega(x, f^n))$，存在 $z \in \omega(x, f^n)$，使 $f(z) = y$. 因有 $\{f^{kn}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 $f^{k_j n}(x) \to z$，故 $f^{k_j n+1}(x) = f^{k_j n}(f(x)) \to f(z) = y$. 即 $y \in \omega(f(x), f^n)$.

反之，对于 $\forall y \in \omega(f(x), f^n)$，有 $\{f^{kn}(f(x))\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 $f^{k_j n}(f(x)) \to y$，即 $f^{k_j n+1}(x) \to y$. 由 X 序列紧性，序列 $\{f^{k_j n}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 必存在收敛子序列 $f^{k_{j_i} n}(x) \to z$，则 $z \in \omega(x, f^n)$ 并且 $f^{k_{j_i} n+1}(x) = f(f^{k_{j_i} n}(x)) \to f(z)$. 又由 $f^{k_{j_i} n+1}(x) \to y$ 与 T_2 空间中极限的唯一性，有 $f(z) = y$. 因此，$y \in f(\omega(x, f^n))$. 故

$$f(\omega(x, f^n)) = \omega(f(x), f^n)$$

(3) 同上，对固定的 $n \in \mathbf{N}$，$\forall y \in \omega(x, f)$，存在 $\{f^n(x)\}$ 的子列 $f^{n_k}(x) \to y$. 则 $\forall k \in \mathbf{N}$ 有 $n_k = q_k n + i_k$，其中 q_k 为正整数，$1 \leqslant i_k \leqslant n$. 因 i_1，i_2，… 有无穷多项，但 i_k 的值只有 n 个，故 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中存在常值子序列 $\{i_{k_j}\}$，即存在 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 $\forall j \in \mathbf{N}$，$i_{k_j} = i$. 故 $f^{n_{k_j}}(x) = f^{q_{k_j} n+i}(x) \to y$ (当 $j \to \infty$ 时)，从而

$$y \in \omega(f^i(x), f^n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \omega(f^i(x), f^n)$$

反过来，对于 $\forall i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，$\forall y \in \omega(f^i(x), f^n)$，存在 $f^{k_j n}(f^i(x)) \to y$，即 $f^{k_j n+i}(x) \to y$. 所以，$y \in \omega(x, f)$.

引理 2 若序列紧空间 X 中的无穷序列 $\{x_n\}$ 发散，则必存在两个子序列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 收敛到不同极限. 即 $x_{n_k}^{(1)} \to a$，$x_{n_k}^{(2)} \to b$，且 $a \neq b$.

证 设 $\{x_n\}$ 为空间 X 的一个发散序列，由 X 的列紧性，它有一个收敛子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$，不妨设 $x_{n_k}^{(1)} \to a$. 因为 $\{x_n\}$ 不收敛到 a，故存在 $U_a \in \mathbf{N}(a)$，使得 $\forall k \in \mathbf{N}$；存在 $n_k > k$，使得 $x_{n_k} \notin U_a$ 并且可以使得 $n_k < n_{k+1}$ $(\forall k \in \mathbf{N})$. 再由 X 的序列紧性，$\{x_{n_k}\}$ 有收敛的子列 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$，记 $x_{n_k}^{(2)} \to b$，则 $b \neq a$.

引理 3 设 A 是空间 X 中的非空有限子集，任意固定一个 $x \in A$，则存在 $U \in \mathbf{N}(x)$，使得对 $\forall y \in A$ 且 $y \neq x$，存在 $V_y \in \mathbf{N}(y)$ 满足 $V_y \cap U$ 为空集.

证 任意固定一个 $x \in A$，对 $\forall y \in A$ 且 $y \neq x$，由 X 是 T_2 空间可知，存在 $V_y \in \mathbf{N}(y)$，$U_y \in \mathbf{N}(x)$ 满足 $V_y \cap U_y$ 为空. 取 $U = \bigcap_{y \in A-\{x\}} U_y$，因为 A 是有限集，即 $A-\{x\}$ 也有限，故 $U \in \mathbf{N}(x)$ 成立，且按 U 的取法，对 $\forall y \in A$，$y \neq x$ 都有 $V_y \cap U$ 为空.

引理 4 设 X 是列紧空间，f 是 X 上的连续自映射. 若存在 $p \in \omega(x, f)$ 使得 $f(p) = p$ 并且 $\omega(x, f)$ 为有限集，则 $\omega(x, f) = \{p\}$.

证 假设结论不成立. 即，存在 $y \in \omega(x, f)$ 使得 $y \neq p$. 因为 $\omega(x, f)$ 为有限集，由引理 3 知，存在 $U \in \mathbf{N}(p)$，对于 $\forall y \in \omega(x, f)$ 且 $y \neq p$，存在 $V_y \in \mathbf{N}(y)$ 满足 $V_y \cap U$ 为空.

因为 $p \in \omega(x, f)$，故存在子列 $f^{n_k}(x) \to p$，故对于 $U \in \mathbf{N}(p)$，$\{f^n(x)\}$ 中有无穷多项属于 U，因此可定义自然数列 $\{N_k\}$，其中

$$N_1 = \min\{n: f^n(x) \in U\}, \cdots, N_k = \min\{n > N_{k-1}: f^n(x) \in U\}, \cdots$$

则序列 $f^{N_k}(x) \to p$. 事实上，若 $\{f^{N_k}(x)\}$ 发散，则由引理 2，存在两个子列收敛到不同极限，不妨记 $f^{N_{k(1)}}(x) \to y_1$，$f^{N_{k(2)}}(x) \to y_2$ 并且 $y_1 \neq y_2$，则 $y_1, y_2 \in \omega(x, f)$. 这时 y_1 与 y_2 中至少有一个不等于 p. 不妨设 $y_1 \neq p$. 由引理 3，存在 $V_{y_1} \in N(y_1)$，使得 $V_{y_1} \cap U$ 为空. 因为 $f^{N_{k(1)}}(x) \to y_1$ 并且 $V_{y_1} \in N(y_1)$，故存在 $K \in \mathbf{N}$，使得 $f^{N_{K(1)}}(x) \in V_{y_1}$. 从而，$f^{N_{K(1)}}(x) \notin U$. 这与 $f^{N_{K(1)}}(x) \in U$ 矛盾. 因此 $f^{N_{k(1)}}(x)$ 必

收敛．现在假定 $f^{N_k}(x)\to p^*\neq p$，则 $p^*\in\omega(x,f)$，由引理 3，存在 $V_{p^*}\in N(p^*)$，使得 $V_{p^*}\cap U$ 为空集．又因存在 $K^*\in\mathbf{N}$，$f^{N_{K^*}}(x)\in V_{p^*}$．从而，$f^{N_{K^*}}(x)\notin U$，这又与 $f^{N_{K^*}}(x)\in U$ 矛盾，因此，总有 $f^{N_k}(x)\to p$ 成立．

现在证明：存在 $i\in\mathbf{N}$，使得 $f^{N_i+1}(x)\notin U$.

事实上，假定对 $\forall N_i$，有 $f^{N_i+1}(x)\in U$，则对 N_1 有 $f^{N_1+1}(x)\in U$．由 N_2 的定义可知 $N_2=N_1+1$．由此类推得对 $\forall N_i$，有 $N_{i+1}=N_i+1$，因此$\{f^n(x)\}$中仅有 N_1-1 项不在 U 中．另一方面，因为存在 $y\in\omega(x,f)$，使得 $y\neq p$，根据引理 3，存在 $V_y\in N(x)$，$V_y\cap U$ 为空．因此，$\{f^n(x)\}$ 有一个子列 $f^{n_k}(x)\to y$，故存在 $K\in\mathbf{N}$，使得 $\forall k>K$ 时，$f^{n_k}(x)\in V_y$．由此推得，$\forall k>K$，有 $f^{n_k}(x)\notin U$．这与$\{f^n(x)\}$中只有有限项不在 U 中矛盾．

令 $M_1=\min\{N_i: f^{N_i+1}(x)\notin U\}$，这时必存在 $N_i>M_1$，使得 $f^{N_i+1}(x)\notin U$．倘若不然，$\forall N_i>M_1$ 有 $f^{N_i+1}(x)\in U$，同上段的证明可知$\{f^n(x)\}$中仅有 N_i-1 项不在 U 中．另一方面，$\{f^n(x)\}$ 中有无穷多项不在 U 中，这又出现矛盾．因此，可定义正整数序列$\{M_k\}$：

$$M_1=\min\{N_i: f^{N_i+1}(x)\notin U\},\cdots,M_k=\min\{N_i>M_{k-1}: f^{N_i+1}(x)\notin U\},\cdots$$

则$\{f^{M_k}(x)\}$为$\{f^{N_k}(x)\}$子列，故 $f^{M_k}(x)\to p$ 成立．再由 f 的连续性以及 p 为 f 的不动点得

$$f^{M_k+1}(x)=f(f^{M_k}(x))\to f(p)=p$$

但由 M_k 的取法知，$\{f^{M_k+1}(x)\}$ 不收敛到 p．从而，导致矛盾．故 $\omega(x,f)=\{p\}$ 成立．

定理 1 的证明　必要性　设 $\omega(x,f)$ 为非空有限集，则 $\omega(x,f)$ 中至少有 f 的一个周期点．

事实上，因 $\omega(x,f)$ 非空，则可取 $q\in\omega(x,f)$．再由引理 1(1)，有$\{f^n(q)\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\omega(x,f)$．故存在 n_1，$n_2\in\mathbf{N}$，$n_1<n_2$，使得 $f^{n_1}(q)=f^{n_2}(q)$．令 $m=n_2-n_1$，则 $m\in\mathbf{N}$ 并且 $f^m(f^{n_1}(q))=f^{n_2}(q)=f^{n_1}(q)$．即，$f^{n_1}(q)$ 是 $\omega(x,f)$ 中的一个周期点．

下证：$\omega(x,f)$ 是 f 的一个周期轨．

设 p 是 f 在 $\omega(x,f)$ 中的一个周期点，其周期为 n．由引理 1(3)，存在 i $(1\leqslant i\leqslant n)$，使

$$p\in\omega(f^i(x),f^n)\subset\omega(x,f)$$

则 $\omega(f^i(x),f^n)$ 也是一个非空有限集．又因 $f^n(p)=p$，根据引理 4，$\omega(f^i(x),f^n)=\{p\}$．$\forall j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$，若 $j=i$，则 $\omega(f^j(x),f^n)=\{p\}$；若 $j>i$，由引理 1(2)，有

$$\omega(f^j(x),f^n)=f(\omega(f^{j-1}(x),f^n))=\cdots=f^{j-i}(\omega(f^i(x),f^n))=\{f^{j-i}(p)\}$$

若 $j<i$，则有

$$\omega(f^j(x),f^n)=f^n(\omega(f^j(x),f^n))=\omega(f^{n+j}(x),f^n)=\cdots=f^{n+j-i}(\omega(f^i(x),f^n))=\{f^{n+j-i}(p)\}$$

总之，$\omega(f^j(x),f^n)$ 是由 p 的周期轨中的某一个点构成的单点集合．由引理 1(3)，有

$$\omega(x,f)=\bigcup_{i=1}^{n}\omega(f^i(x),f^n)\subset\{p,f(p),f^2(p),\cdots,f^{n-1}(p)\}$$

又由引理 1(1) 可得$\{p,f(p),f^2(p),\cdots,f^{n-1}(x)\}\subset\omega(x,f)$．因此

$$\omega(x,f)=\{p,f(p),f^2(p),\cdots,f^{n-1}(p)\}$$

充分性　设 $\omega(x,f)$ 为 f 的一个周期轨，由周期轨的定义，显然，$\omega(x,f)$ 是有限集．

根据定理 1，下面的推论平凡成立．

推论 1　设 X 是一个紧空间或者第一可数的可数紧空间．f 是 X 上的连续自映射并且 $x\in X$，则点 x 关于 f 的 ω-极限集 $\omega(x,f)$ 为非空有限集当且仅当它是 f 的一个周期轨．

若对序列紧空间 X 加不多的限制，还可得到下述结论．

定理 2　设 X 是满足第一可数性公理的序列紧空间，f 是 X 上的连续自映射，则 $x\in\omega(x,f)$ 当且仅当 x 为 f 的回归点．

证　必要性　设 $x\in\omega(x,f)$，则$\{f^n(x)\}$ 有子序列$\{f^{n_k}(x)\}$ 收敛到 x．故 $\forall U\in N(x)$，存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $f^{n_k}(x)\in U$．即 x 为 f 的回归点．

充分性　设 x 为 f 的回归点，若 x 是 f 的周期点，即存在 $n\in\mathbf{N}$，使 $f^n(x)=x$，则$\{f^n(x)\}$ 有子序列$\{f^{kn}(x)\}$ 收敛到 x．不妨设 x 是 f 的非周期点，因 X 满足第一可数性公理，则点 x 有一个递降可数开邻域基$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$．由回归点定义，对任意自然数 i，可取 $f^{n_i}(x)\in U_i$ 且 $n_i>n_{i-1}$．由此得$\{f^n(x)\}$ 的一个子列

$\{f^{n_i}(x)\}$，对 $\forall i \in \mathbf{N}$，使得 $f^{n_i}(x) \in U_i$. 从而，$f^{n_i}(x) \to x$，即 $x \in \omega(x, f)$.

定理 3　设 X 是满足第一可数性公理的空间，f 是 X 上的连续自映射，则 $\omega(x, f)$ 为 X 的闭子集.

证　只需证 $\overline{\omega(x, f)} \subset \omega(x, f)$. 设 $y \in \overline{\omega(x, f)}$，因为 X 满足第一可数性公理，故 y 有一个递降可数开邻域基 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\forall i \in \mathbf{N}$，取 $z_i \in U_i \cap \omega(x, f)$，因 $\{f^n(x)\}$ 有子列 $f^{n_k^{(i)}}(x) \to z_i$. 故可取 $f^{n_{k_i}^{(i)}}(x) \in U_i$. 从而得到 $\{f^n(x)\}$ 的一个子列 $\{f^{n_{k_i}^{(i)}}(x)\}$，使得 $f^{n_{k_i}^{(i)}}(x) \in U_i$. 从而 $f^{n_{k_i}^{(i)}}(x) \to y$. 即 $y \in \omega(x, f)$.

因为度量空间是满足第一可数性公理的拓扑空间，故根据定理 2 和定理 3，下列两个推论的正确性是显见的.

推论 2　若 f 是紧或者可数紧的度量空间 X 上的连续自映射，则 $x \in \omega(x, f)$ 当且仅当 x 为 f 的回归点.

推论 3　若 f 是度量空间 X 上的连续自映射，则 $\omega(x, f)$ 为 X 的闭子集.

参考文献：

[1] 张景中，熊金城. 函数迭代与一维动力系统 [M]. 成都：四川教育出版社，1992：167－169.

[2] 熊金城. 周期点集为闭集的闭线段连续自映射 [J]. 中国科学技术大学学报，1981，11(4)：14－23.

[3] Covern E M，Nitecki Z. Non-wandering Sets of the Powers of Maps of the Interval [J]. Ergod Th and Dyn Sys，1981，1：9－31.

[4] YE X. The Centre and Depth of the Centre of a Treemap [J]. Bull Austra Math Soc，1993，48：347－350.

[5] 严珍珍. 树上乘积自映射周期点集的局部度量稳定性 [J]. 系统科学与数学，2004，24(1)：35－40.

[6] 孙太祥. 树映射的链等价集和拓扑熵 [J]. 数学年刊(A)，2005，26(1)：131－138.

[7] 陈绥阳，褚蕾蕾. 动力系统基础及其方法 [M]. 北京：科学出版社，2002：9.

[8] 朱培勇. 强次亚紧的乘积性质及其与次亚紧的关系 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2002，27(6)：823－827.

[9] 王建军，朱培勇. 具有性质 b1 的拓扑空间族的逆极限 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2008，30(4)：32－35.

[10] 董若愚，朱培勇. 完备度量空间上连续自映射的无限可扩 LY-不规则集的构造 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2008，30(6)：1－5.

ω-Limit Points of a Continuous Self-mapping on a Sequentially Compact Space

TANG Xiao-xian，　ZHU Pei-yong

School of Applied Mathematics，University of Electronic Science and Technology of China，Chengdu 610054，China

Abstract：This paper discusses the orbital asymptotic properties of a topological dynamical system whose base space is a sequentially compact space，and proves the main theorem：Let f be a continuous self-mapping on a sequentially space X，then ω-limit set $\omega(x, f)$ of a point $x \in X$ is a nonempty finite set if it is a periodic orbit of f. As inference，the authors get exactly the same conclusion when X is a compact (countably compact) space.

Key words：ω-limit point；sequentially compact space；continuous self-mapping；periodic orbit

责任编辑　覃吉康