第 33 卷　第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 10 月
Vol. 33　No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2008

文章编号：1000-5471(2008)05-0034-05

局部对偶平坦的 Randers 度量①

蒋经农[1]，　周宇生[2]

1. 遵义医学院 基础部，贵州 遵义 563003；2. 贵阳学院 数学系，贵阳 550005

摘要： 研究 Randers 度量 $F=\alpha+\beta$ (其中 α 是黎曼度量，β 是 1-形式) 的局部对偶平坦问题. 得到了当 α 是局部射影平坦时 F 是局部对偶平坦的充要条件.

关　键　词： 局部对偶平坦；局部射影平坦；Randers 度量

中图分类号：O186.14　　**文献标识码：A**

对偶平坦的流形是微分几何中一类重要的研究对象，应用非常广泛，在信息几何、相对论、超弦理论中有着重要的作用. 在目前已知的 Finsler 度量中，只有 Fuck 度量和局部闵可夫斯基度量是局部对偶平坦的.

Rands 度量是 Finsler 几何中研究的最多的一类度量，其应用相当广泛，有必要对 Randers 度量进行各种分类. 在目前的研究成果中，文献[1] 已经将射影平坦具有常曲率的 Randers 度量进行分类，文献[2] 对常曲率的 Randers 度量进行了分类，文献[3] 对具有迷向 S 曲率的 Randers 度量进行了分类.

本文对局部对偶平坦的 Randers 度量进行了研究，得到以下定理：

定理 1　设(M, F)是 n ($\geqslant 3$) 维 Finsler 流形，$F=\alpha+\beta$ 是 Randers 度量，其中 $\alpha=\sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ 是局部射影平坦的黎曼度量，$\beta=b_iy^i$ 是 1-形式. 则 F 是局部对偶平坦的度量当且仅当 F 是下列情形之一：

(1) F 是局部闵可夫斯基度量；

(2) F 局部等距为

$$\hat{F}=\frac{\sqrt{|y|^2+\mu(|x|^2|y|^2-\langle x, y\rangle^2)}+2c\langle x, y\rangle}{1+\mu|x|^2}$$

其中 $\mu=-4c^2$，c 是一常数.

当 $c=\frac{1}{2}$ 时，$\hat{F}$ 是 Fuck 度量.

1　预备知识

本文主要研究 Finsler 度量局部对偶平坦的问题. 下面我们给出局部对偶平坦的 Finsler 度量的定义：

定义　如果一个 Finsler 度量 F 满足

$$[F]^2_{x^ly^k}y^l-2[F^2]_{x^k}=0 \tag{1}$$

则称 F 是局部对偶平坦的.

对于局部射影平坦的 Finsler 度量 F，我们知道其一定具有标量旗曲率[4]，且标量曲率的表达式为

① 收稿日期：2008-02-22
基金项目：遵义医学院自然科学基金资助项目(F-259)；贵阳学院院级项目.
作者简介：蒋经农(1982-)，男，重庆忠县人，助教，主要从事微分几何学的研究.

$$K(x, y) = \frac{P^2 - P_{x^k} y^k}{F^2} \tag{2}$$

如果 Finsler 度量 F 既具有标量旗曲率，又具有几乎殆向 S 曲率，即 $S = (n+1)cF + \eta$（其中 η 是 1-形式），则我们可以把标量曲率[5] 表示为

$$K(x, y) = \frac{3c_{x^k} y^k}{F} + \sigma \tag{3}$$

其中 $\sigma = \sigma(x)$ 是标量函数.

2　局部对偶平坦的 Randers 度量

对于 Randers 流形(M, F)，令 $A = [F^2]_{x^k}$，$B = [F]^2_{x^l y^k}$. 经过计算得

$$A = [F^2]_{x^k} = 2FF_{x^k} = 2(1+s)\left[(y_m + \alpha b_m)\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \alpha b_{m|k} y^m\right] \tag{4}$$

$$B = [F^2]_{x^l y^k} = 2s_{y^k}\left[(y_m + \alpha b_m)\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^l} + \alpha b_{m|l} y^m\right] +$$
$$2(1+s)\left[(a_{mk} + \alpha_{y^k} b_m)\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^l} + (y_m + \alpha b_m)\frac{\partial^2 G^m_\alpha}{\partial y^l \partial y^k} + \alpha_{y^k} b_{m|l} y^m + \alpha b_{k|l}\right] \tag{5}$$

因 F 是局部对偶平坦的，将(4) 式和(5) 式代入(1) 得

$$[F]^2_{x^l y^k} y^l - 2[F^2]_{x^k}$$
$$= 2\frac{b_k\alpha^2 - \beta y_k}{\alpha^3}[2(y_m + \alpha b_m)G^m_\alpha + \alpha r_{00}] +$$
$$2(1+s)\left\{2(a_{mk} + \frac{y_k}{\alpha} b_m)G^m_\alpha - (y_m + \alpha b_m)\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \frac{r_{00} y_k}{\alpha} + \alpha b_{k|l} y^l - 2\alpha b_{m|k} y^m\right\} = 0 \tag{6}$$

将(6) 乘以 α^3 得

$$2(b_k\alpha^2 - \beta y_k)[2(y_m + \alpha b_m)G^m_\alpha + \alpha r_{00}] +$$
$$2(\alpha+\beta)\alpha\left[2(\alpha_m k\alpha + y_k b_m)G^m_\alpha - (\alpha y_m + \alpha^2 b_m)\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + r_{00} y_k + \alpha^2 b_{k|l} y^l - 2\alpha^2 b_{m|k} y^m\right] = 0 \tag{7}$$

将(7) 式按 α 的多项式整理得

$$(-2b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + 2b_{k|l} y^l - 4b_{m|k} y^m)\alpha^4 +$$
$$(4b_k b_m G^m_\alpha + 2b_k r_{00} + 4\alpha_{mk} G^m_\alpha - 2y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - 2\beta b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + 2\beta b_{k|l} y^l - 4\beta b_{m|k} y^m)\alpha^3 +$$
$$(4b_k y_m G^m_\alpha + 4b_k y_k G^m_\alpha + 2r_{00} y_k + 4\beta a_m k G^m_\alpha - 2\beta y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k})\alpha^2 +$$
$$(-4\beta b_m y_k G^m_\alpha - 2\beta y_k r_{00} + 4\beta b_m y_k G^m_\alpha + 2\beta r_{00} y_k)\alpha - 4\beta y_k y_m G^m_\alpha = 0 \tag{8}$$

由(8) 式知道 α 的系数项为零，故 α^3 的系数项也为零，所以

$$4b_k b_m G^m_\alpha + 2b_k r_{00} + 4\alpha_{mk} G^m_\alpha - 2y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - 2\beta b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + 2\beta b_{k|l} y^l - 4\beta b_{m|k} y^m = 0 \tag{9}$$

$$(-2b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + 2b_{k|l} y^l - 4b_{m|k} y^m)\alpha^4 +$$
$$(4b_k y_m G^m_\alpha + 4b_m y_k G^m_\alpha + 2r_{00} y_k + 4\beta a_{mk} G^m_\alpha - 2\beta y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k})\alpha^2 - 4\beta y_k y_m G^m_\alpha = 0 \tag{10}$$

又

$$y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} = \frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} - \alpha_{mk} G^m_\alpha \tag{11}$$

$$b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} = \frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} \tag{12}$$

将(9)式用 b^k 缩并，然后将(11)式和(12)式代入得

$$2\left[\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k+\beta\frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k\right]=4b^2 b_m G^m_\alpha+2b^2 r_{00}+6b_m G^m_\alpha+6\beta s_0-2\beta r_0 \tag{13}$$

将(10)式用 b^k 缩并，然后将(11)式和(12)式代入得

$$\begin{aligned}&2\left[\frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k\alpha^4+\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k\beta\alpha^2\right]\\&=(6s_0-2r_0)\alpha^4+(4b^2 y_m G^m_\alpha+10\beta b_m G^m_\alpha+2\beta r_{00})\alpha^2-4\beta^2 y_m G^m_\alpha\end{aligned} \tag{14}$$

将(13)$\times\alpha^4-$(14)$\times\beta$，然后整理得

$$\begin{aligned}&2\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k\alpha^4-2\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k\beta^2\alpha^2\\&=4b^2 b_m G^m_\alpha\alpha^4+6b_m G^m_\alpha\alpha^4+2b^2 r_{00}\alpha^4-4b^2 y_m G^m_\alpha\beta\alpha^2-10b_m G^m_\alpha\beta^2\alpha^2-2r_{00}\beta^2\alpha^2+4\beta^3 y_m G^m_\alpha\end{aligned} \tag{15}$$

将(15)式整理得

$$\left[2\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k-6b_m G^m_\alpha\right]\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)=(4b_m G^m_\alpha\alpha^2+2r_{00}\alpha^2-4\beta y_m G^m_\alpha)(b^2\alpha^2-\beta^2) \tag{16}$$

因$(b^2\alpha^2-\beta^2)$不能整除$(\alpha^2-\beta^2)$和 α^2，所以存在 $\tau=\tau(x)$，使得

$$4b_m G^m_\alpha\alpha^2+2r_{00}\alpha^2-4\beta y_m G^m_\alpha=\tau\alpha^2(\alpha^2-\beta^2) \tag{17}$$

$$2\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k}b^k-6b_m G^m_\alpha=\tau(b^2\alpha^2-\beta^2) \tag{18}$$

将(17)式整理得

$$4\beta y_m G^m_\alpha=(4b_m G^m_\alpha+2r_{00}-\tau\alpha^2+\tau\beta^2)\alpha^2 \tag{19}$$

因为 α^2 不能被 β 整除，所以

$$y_m G^m_\alpha=\theta\alpha^2 \tag{20}$$

$$4\beta\theta=4b_m G^m_\alpha+2r_{00}-\tau\alpha^2+\tau\beta^2 \tag{21}$$

其中 $\theta=\theta_k y^k$ 是 α 的射影因子.

3　定理1的证明

必要性　因为 α 是局部射影平坦的，所以由(20)式得

$$P_\alpha=\frac{\alpha_{x^k}y^k}{2\alpha}=\frac{y_m G^m_\alpha}{\alpha^2}=\theta$$

其中 P_α 是 α 的射影因子. 所以

$$G^m_\alpha=\theta y^m \tag{22}$$

$$b_m G^m_\alpha=\theta\beta \tag{23}$$

将(23)式代入(21)式得

$$r_{00}=\frac{1}{2}\tau(\alpha^2-\beta^2) \tag{24}$$

将(20)和(21)代回到(18)式得

$$2b^k\theta_k\alpha^2-2\theta\beta=\tau(b^2\alpha^2-\beta^2) \tag{25}$$

其中 $\theta_k=\dfrac{\partial\theta}{\partial y^k}$. 将(25)式整理得

$$(2b^k\theta_k-\tau b^2)\alpha^2=2\theta\beta-\tau\beta^2 \tag{26}$$

因为 $2\theta\beta-\tau\beta^2$ 不能整除 α^2，所以

$$2b^k\theta_k-\tau b^2=0 \tag{27}$$

$$2\theta\beta-\tau\beta^2=0 \tag{28}$$

将(27)和(28)式解出得

$$\theta = \frac{\tau}{2}\beta \tag{29}$$

将(21),(22),(23) 和(29) 代入(9) 式得

$$4b_k\theta\beta + \tau b_k(\alpha^2 - \beta^2) + 6\theta y_k - 2(\theta_k\alpha^2 + 2\theta y_k) - 2\beta(\theta_k\beta + b_k\theta) + 6\beta s_{k0} - 2\beta r_{k0} = 0 \tag{30}$$

由(24) 得 $r_{k0} = \frac{1}{2}\tau(y_k - b_k\beta)$，将其代入(30) 式得 $s_{k0} = 0$，所以 β 是闭的.

现在我们要分两种情形来讨论.

当 $\tau = 0$ 时，$\theta = 0$. 此时显然有 $b_{i|j} = 0$，$G^m_\alpha = 0$，所以

$$F_{x^k} = \alpha_{x^k} + \beta_{x^k} = 0$$

即 F 是只与(y^i) 有关的，所以 F 是局部闵可夫斯基的.

当 $\tau \neq 0$ 时，因 α 是局部射影平坦的，β 是闭的，所以 F 是局部射影平坦的. 由(24) 式和文献[7] 可知，F 是具有殆向 S 曲率的，且 $S = \frac{\tau}{4}(n+1)F$. 又因为 F 是局部射影平坦的，所以其具有标量旗曲率 $K(x, y)$. 再加上 F 是具有殆向 S 曲率的，令 $\tau = 4c$，则 $P_\alpha = \theta = 2c\beta$，所以

$$K(x, y) = \frac{P^2 - P_{x^k}y^k}{F^2} = -c^2 - \frac{c_{x^k}y^k}{F} \tag{31}$$

$$K(x, y) = \frac{3c_{x^k}y^k}{F} + \sigma \tag{32}$$

综合(31),(32) 得

$$\frac{4c_{x^k}y^k}{F} = -c^2 - \sigma \tag{33}$$

将(33) 展开并整理得

$$4c_{x^k}y^k + (c^2 + \sigma)\beta + (c^2 + \sigma)\alpha = 0$$

由多项式原理有

$$c^2 + \sigma = 0$$

$$4c_{x^k}y^k + (c^2 + \sigma)\beta = 0$$

所以 $c_{x^k}y^k = 0$，将其代入(32) 式可得，$K(x,y) = -c^2$，此时 c 是常数. 因为 α 是局部射影平坦的，所以由 Beltrami 定理[8] 可知，α 是具有常数曲率的黎曼度量，且 α 局部等距于 $B^n(r_\mu) \subset R^n$ 上的度量

$$\alpha_\mu = \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1 + \mu|x|^2} \tag{34}$$

由(34) 式得

$$P_\alpha = -\frac{\mu\langle x, y\rangle}{1 + \mu|x|^2} \tag{35}$$

将 $P_\alpha = 2c\beta$ 代入 (35) 式得

$$\beta = \frac{2c\langle x, y\rangle}{1 + \mu|x|^2}$$

所以 F 局部等距于

$$\hat{F} = \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)} + 2c\langle x, y\rangle}{1 + \mu|x|^2}$$

其中 $\mu = -4c^2$. 当 $c = \frac{1}{2}$ 时，$\hat{F}$ 可以表示为

$$\hat{F} = \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)} + \langle x, y\rangle}{1 - |x|^2}$$

此时，$\hat{F}$ 是 Fuck 度量.

充分性　显然.

参考文献：

[1] Shen Z. Projectively Flat Randers Metrics of Constant Flag Curvature [J]. Math Ann, 2003, 325: 19－30.

[2] Bao D, Robles C. On Randers Spaces of Constant Flag Curvature [J]. Rep on Math Phys, 2003, 51(1): 9－42.

[3] Chen X, shen Z. Randers Metrics With Special Curvature Properties [J]. Osaka J Math, 2003, 40: 87－101.

[4] Berwald L. Uber die n-dimensionalen Geometrien Konstanter Krummung, indenen die Geraden die kurzesten sind [J]. Math Z, 1929, 30: 449－469.

[5]Cheng X, Mo X, Shen Z. On the Flag Curvature of Finsler Metrics of Scalar Curvature [J]. J London Math Soc, 2003, 68(2): 762－780.

[6] Shen Z. Differential Geometry of Spray and Finsler Space [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[7] Chern S S, Shen Z. Riemman-Finsler Gemometry [M]. Singapore: Singapore Word Scientific Publisher, 2005: 36－37.

[8] Antonelli P, Ingarden R, Matsumoto M. The Theory of Sprays and Finsler Space with Applications in Physics and Biology [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[9] 周宇生，王　佳. 对称的(α, β)-度量 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(11)：14－17.

Locally Dual Flat Randers Metrics

JIANG Jing-nong[1]，　ZHOU Yu-sheng[2]

1. Department of Basic Medical College, Zunyi Medical College, Zunyi Guizhou 563003, China;

2. Department of Mathematics, Guiyang University, Guiyang 550005, China.

Abstract: This paper main studies the qualities of locally dual flat metrics. It is obtained that the sufficient and necessary conditions of the dual flat Randers metrics when α is locally projectively flat.

Key words: locally dual flat; locally projectively flat; Randers metrics

责任编辑　覃吉康