第 33 卷　第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 10 月
Vol. 33　No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2008

文章编号：1000－5471(2008)05－0030－04

1－形式 β 对旋转曲面生成 Finsler 球面的影响[①]

聂　智

重庆文理学院 数学与统计学院，重庆 永川 402168

摘要： 在一类 Minkowski 空间($V^3, F=\alpha+\beta$)中，利用旋转曲面 φ 的整体单位法向量场研究了 1－形式 $\beta=b_i\theta^i$ 对于 φ 的影响，得到了旋转曲面 φ 生成 Finsler 球面的一个充分必要条件：$(b_1)^2+(b_2)^2=0$.

关　键　词： Minkowski 空间；1－形式；旋转曲面；整体法向量场；Finsler 球面

中图分类号： O186.1　　　　**文献标识码：** A

Finsler 子流形因度量的一般性变得较 Riemann 流形中的情况更复杂，从而，对于有关法向量场、球面等几何规律，存在的情况也不相同. 在此，我们在一类具有 Randers 度量的三维 Minkowski 空间((V^3，$F=\alpha+\beta$)，$0\leqslant b<1$) 中研究旋转曲面 φ 的整体单位法向量场的存在状况，得到了 1－形式 β 对旋转曲面 φ 生成 Finsler 球面的影响规律. 经典微分几何中的结果仅仅是 $\beta=0$ 的情况.

1　准备工作

为了与 Euclidean 空间相联系，在更广泛空间去认识图形，在此想到在一种具有 Randers 度量[2,3] 的较特殊的一类 Minkowski 空间中去研究.

定义 1　若 Minkowski 空间(V，F) 中，向量空间 V 上的度量 $F=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$ 为一个 Randers 度量，其中 $\alpha(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}$ 是一个 Euclidean 度量，1－形式 $\beta=b_i\theta^i$，$\beta(x,y)=b_iy^i$ 满足

$$0\leqslant\|\beta\|_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}=b<1$$

则将具有此 Randers 度量的 Minkowski 空间记为(V^3，$F=\alpha+\beta$)，b 称为此 Randers 度量 F 的影响因子.

在三维 Minkowski 空间(V^3，$F=\alpha+\beta$) 中引入旋转曲面如下.

定义 2　若在三维 Minkowski 空间(V^3，$F=\alpha+\beta$) 中，给定关于度量 α 的标准正交标架$\{e_i\}$，则在此标架下，由 $\varphi(t,\theta)=(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$(其中 $\theta\in[0,2\pi)$，$f(t)>0$，$t\in R$，$0\leqslant\|\beta\|_x=b<1$) 确定的旋转曲面 φ：$M^2\longrightarrow V^3$ 称为 Minkowski 空间(V^3，$F=\alpha+\beta$) 中的旋转曲面.

注　当 $\beta=0$ 时，φ 退化为 Euclidean 空间中的旋转曲面；我们用 f 表示 $f(t)$，f' 表示$\dfrac{df(t)}{dt}$，有关知识参见文献[1－3].

2　旋转曲面 φ 的整体单位法向量场

引理 1　已知三维 Minkowski 空间(V^3，$F=\alpha+\beta$) 中的旋转曲面 φ：$M^2\longrightarrow(V^3$，$F=\alpha+\beta)$，在给

① 收稿日期：2008－05－28
基金项目：重庆市教委科学技术研究资助项目(KJ071201)，重庆文理学院科研项目.
作者简介：聂　智(1963－)，男，重庆江津人，副教授，主要从事微分几何学的研究.

定标准正交标架 $\{e_i\}$（关于度量 α）下的位置向量为

$$\varphi(t,\theta)=(f\cos\theta,\ f\sin\theta,\ t)\qquad f=f(t)>0,\ \theta\in[0,2\pi)$$

则旋转曲面 φ 存在使得当 $\beta=0$ 时 $(\varphi_t,\varphi_\theta,\upsilon)>0$ 的唯一的整体单位法向量场 $\upsilon=\upsilon^i e_i$，满足

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}(\upsilon^i\varphi_t^i+|\upsilon|b_i\varphi_t^i)=0\\ \sum_{i=1}^{3}(\upsilon^i\varphi_\theta^i+|\upsilon|b_i\varphi_\theta^i)=0\\ \sqrt{(\upsilon^1)^2+(\upsilon^2)^2+(\upsilon^3)^2}+\sum_{i=1}^{3}b_i\upsilon^1=1\end{cases}\tag{1}$$

证　由于在 $(V^3,F=\alpha+\beta)$ 中的旋转曲面 φ 有切向量场

$$\varphi_t=\varphi_*(\frac{\partial}{\partial t})=(f'\cos\theta,\ f'\sin\theta,\ 1)$$

$$\varphi_\theta=\varphi_*(\frac{\partial}{\partial\theta})=(-f\sin\theta,\ f\cos\theta,\ 0)\in\varphi_*(TM^2)$$

则可以寻找 φ 的整体单位法向量场 υ. 由 υ 的特征 $g_\upsilon(\upsilon,\varphi_*(TM^2))=0$，$F(\upsilon)=\sqrt{g_\upsilon(\upsilon,\upsilon)}=1$，得到

$$\begin{cases}g_\upsilon(\upsilon,\varphi_t)=0\\ g_\upsilon(\upsilon,\varphi_\theta)=0\\ g_\upsilon(\upsilon,\upsilon)=1\end{cases}\tag{2}$$

由于 $F=\alpha+\beta$ 为 1 次正齐次函数，由 Euler 定理以及 Minkowski 空间 $(V^3,F=\alpha+\beta)$ 的特点得到 $g_{ij}(\upsilon)\upsilon^j=\frac{F(\upsilon)}{\alpha(\upsilon)}(\upsilon^i+|\upsilon|b_i)$，又

$$g_\upsilon(\upsilon,\varphi_t)=g_{ij}(\upsilon)\upsilon^j\varphi_t^i$$
$$g_\upsilon(\upsilon,\varphi_\theta)=g_{ij}(\upsilon)\upsilon^j\varphi_\theta^i$$

所以有(1)式成立.

从几何特点知道有两个方向的 υ 满足方程(1). 由于当 $\beta=0$ 时，有 $(\varphi_t,\varphi_\theta,\upsilon)>0$，可以确定 υ 的一个方向. 由此唯一确定了旋转曲面 φ 的一个整体单位法向量场 υ.

引理 2　已知三维 Minkowski 空间 $(V^3,F=\alpha+\beta)$ 在 1-形式 $\beta=b_i\theta^i$ 中 $b_1=b_2=0$. 旋转曲面 φ：$M^2\longrightarrow(V^3,F=\alpha+\beta)$，在给定标准正交标架 $\{e_i\}$（关于度量 α）下的位置向量为

$$\varphi(t,\theta)=(f\cos\theta,\ f\sin\theta,\ t)\qquad f=f(t)>0,\ \theta\in[0,2\pi)$$

则旋转曲面 φ 存在使得当 $\beta=0$ 时，$(\varphi_t,\varphi_\theta,\upsilon)>0$ 的唯一的一个整体单位法向量场 $\upsilon=\upsilon^i e_i$ 为

$$\begin{cases}\upsilon^1=-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{(f')^2-(b_3)^2+1}}\\ \upsilon^2=-\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{(f')^2-(b_3)^2+1}}\\ \upsilon^3=\dfrac{b_3}{(b_3)^2-1}-\dfrac{f'}{((b_3)^2-1)\sqrt{(f')^2-(b_3)^2+1}}\end{cases}\tag{3}$$

证　因为 $b_1=b_2=0$，并且 $\varphi_t=(f'\cos\theta,f'\sin\theta,1)$，$\varphi_\theta=(-f\sin\theta,f\cos\theta,0)$. 所以(1)式变为

$$\begin{cases}\upsilon^1f'\cos\theta+\upsilon^2f'\sin\theta+\upsilon^3+\sqrt{(\upsilon^1)^2+(\upsilon^2)^2+(\upsilon^3)^2}\,b_3=0\\ -\upsilon^1f\sin\theta+\upsilon^2f\cos\theta=0\\ \sqrt{(\upsilon^1)^2+(\upsilon^2)^2+(\upsilon^3)^2}+b_3\upsilon^3=1\end{cases}\tag{4}$$

解此方程组，在 $\beta=0$ 时 $(\varphi_t,\varphi_\theta,\upsilon)>0$ 的条件下，可以唯一确定整体单位法向量场 υ 满足(3).

3　β 对旋转曲面生成 Finsler 球面的影响

在 Minkowski 空间 $(V^3,F=\alpha+\beta)$ 中，我们关注球面由旋转曲面 φ 生成的状况，以及与 Euclidean 空

间中情况的联系. 从而，在此考察旋转曲面 φ 在 1-形式 β 的影响下生成球面的问题.

定义 3 若 Minkowski 空间中超曲面 h:$(M^n, \bar{F}) \longrightarrow (V^{n+1}, F)$ 满足 $F(h) = r$，则称超曲面 h 为半径是 r 的 Finsler 球面.

定理 1 若 Minkowski 空间$(V^3, F = \alpha + \beta)$ 中 1-形式 $\beta = b_3\theta^3$，旋转曲面 φ 在给定标准正交标架 $\{e_i\}$(关于度量 α) 下的位置向量为

$$\varphi(t, \theta) = (f\cos\theta, f\sin\theta, t) \qquad f = f(t) > 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

则旋转曲面 φ 所生成的半径为 r 的 Finsler 球面为

$$\varphi(t, \theta) = (f\cos\theta, f\sin\theta, t) \qquad \theta \in [0, 2\pi) \tag{5}$$

其中 $f = \sqrt{(b_3)^2t^2 + 2b_3rt + r^2 - t^2}$.

特别地，当 $\beta = 0$ 时，旋转曲面 φ 生成的 Finsler 球面是欧氏球面.

证 首先，若旋转曲面 φ 是一个半径为 r 的 Finsler 球面，则有 $\upsilon = \dfrac{\pm\varphi}{F(\varphi)}$ 为旋转曲面 φ 的整体单位法向量场[1,5]，在此结合 υ 所取方向，有 $\varphi = -r\upsilon$.

其次，对于 $\beta = b_3\theta^3$，若 φ 构成了半径为 r 的 Finsler 球面，则由 $\varphi = -r\upsilon$，以及(3) 得到

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{r}f\cos\theta = -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{(f')^2 - (b_3)^2 + 1}} \\ \dfrac{-1}{r}f\sin\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{(f')^2 - (b_3)^2 + 1}} \\ \dfrac{-t}{r} = \dfrac{b_3}{(b_3)^2 - 1} - \dfrac{f'}{((b_3)^2 - 1)\sqrt{(f')^2 - (b_3)^2 + 1}} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \sqrt{(f')^2 - (b_3)^2 + 1} = \dfrac{r}{f} \\ rf' = (b_3r + t((b_3)^2 - 1))\sqrt{(f')^2 - (b_3)^2 + 1} \end{cases}$$

由于

$$f = \frac{b_3r + t((b_3)^2 - 1)}{f'} > 0$$

从而由

$$f' = \frac{-t + (b_3)^2t + b_3r}{\sqrt{(r + t + b_3t)(r - t + b_3t)}}$$

得到

$$f = \sqrt{(b_3)^2t^2 + 2b_3rt + r^2 - t^2}$$

在此得到半径为 r 的 Finsler 球面的方程(5). 特别地，当 $\beta = 0$ 时，$f = \sqrt{r^2 - t^2}$ 正是旋转曲面 φ 生成半径为 r 的欧氏球面的生成曲线.

定理 2 若 Minkowski 空间$(V^3, F = \alpha + \beta)$ 中 1-形式 $\beta = b_i\theta^i$，旋转曲面 φ 在给定标准正交标架 $\{e_i\}$(关于度量 α) 下的位置向量为：

$$\varphi(t, \theta) = (f\cos\theta, f\sin\theta, t) \qquad f = f(t) > 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

则旋转曲面 φ 选取 f 可以生成 Finsler 球面的充分必要条件是 1-形式 $\beta = b_i\theta^i$ 满足 $(b_1)^2 + (b_2)^2 = 0$.

证 首先证明必要性. 若 φ 构成了半径为 r 的 Finsler 球面，则由文献[1,5] 可以知道 φ 的整体单位法向量场 $\upsilon = \dfrac{\pm\varphi}{F(\varphi)}$，结合 υ 的方向性(引理 1、引理 2)，有 $\varphi = -r\upsilon$. 又因为

$$\varphi_t = \varphi_*(\frac{\partial}{\partial t}) = (f'\cos\theta, f'\sin\theta, 1)$$

$$\varphi_\theta = \varphi_*(\frac{\partial}{\partial\theta}) = (-f\sin\theta, f\cos\theta, 0)$$

从而由(1) 得到旋转曲面 φ 生成半径为 r 的 Finsler 球面的条件：

$$\begin{cases} -t-ff'+(b_3+f'(\cos\theta)b_1+f'(\sin\theta)b_2)\sqrt{f^2+t^2}=0 \\ b_2\cos\theta-b_1\sin\theta=0 \\ \sqrt{f^2+t^2}=f(\cos\theta)b_1+f(\sin a\,\theta)b_2+(r+tb_3) \end{cases}$$

从而得到 1 -形式 $\beta=b_i\theta^i$ 必须满足：$(b_1)^2+(b_2)^2=0$.

其次证明充分性. 若 Minkowski 空间 $(V^3, F=\alpha+\beta)$ 中 1 -形式 $\beta=b_i\theta^i$ 满足 $(b_1)^2+(b_2)^2=0$，则由定理 1 知道，旋转曲面 φ 的位置向量为

$$\varphi(t,\theta)=(f\cos\theta, f\sin\theta, t) \qquad f=f(t)>0,\ \theta\in[0,2\pi)$$

可以选取生成曲线为 $f=\sqrt{(b_3)^2t^2+2b_3rt+r^2-t^2}$，使得 $\varphi=-r\upsilon$，从而 $F(\varphi)=F(-r\upsilon)=rF(\upsilon)$，由 υ 是 φ 的整体单位法向量场得到 $F(\varphi)=r$，从而 φ 为半径为 r 的 Finsler 球面.

参考文献：

[1] Shen Z. On Finsler Geometry of Submanifolds [J]. Math Ann, 1998, 311: 549－576.

[2] Shen Z. Lectures on Finsler Geometry [M]. Singapore: World Scientific Publishers, 2001.

[3] Antonelli P, Ingarden R, Matsumoto M. The Theory of Sprays and Finsler Spaces With Applications in Physics and Biology [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[4] Yasuda H, Shimada H. On Randers Spaces of Scalar Curvature [J]. Rep on Math Phys, 1977, 11: 347－360.

[5] 聂　智. 关于 Minkowski 空间中超曲面的曲率 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1999, 24(4): 391－396.

[6] 聂　智. 关于拟 Einstein 流形的射影性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(10): 39－44.

[7] 郭迎弟, 王　佳. 一类具有迷向 Ricci 曲率的(α, β)度量 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(11): 11－22.

The Influence of 1－Form $\boldsymbol{\beta}$ on Rotation Surface Brought into Finsler Sphere

NIE　Zhi

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Arts and Sciences, Yongchuan Chongqing 402168, China

Abstract: The influence of 1-form $\beta=b_i\theta^i$ on the rotation surface φ is studied by using global unit normal vector field of rotation surface, a necessary and sufficient condition $(b_1)^2+(b_2)^2=0$ of the rotation surface φ brought into Finsler sphere is given in one kind Minkowski space $(V^3, F=\alpha+\beta)$.

Key words: Minkowski space; 1-form; rotation surface; global normal vector field; Finsler sphere

责任编辑　覃吉康