文章编号：1000-5471(2008)05-0026-04

Minty 弱向量似变分不等式解的存在性①

朱　石　焕

安阳师范学院 数学科学学院，河南 安阳 455002

摘要： 研究 Minty 弱向量似变分不等式解的存在性问题，探讨非可微非凸函数与 Minty 弱向量似变分不等式之间的关系以及向量优化问题弱有效解存在的条件.

关　键　词： Minty 向量似变分不等式；不变凸；伪不变凸；不变伪单调

中图分类号：O178　　　　**文献标识码：A**

设 f_i $(i=1,\cdots,l)$ 在子集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上满足局部 Lipschitz 条件，$\partial f(x)$ 是函数 f 在点 x 的广义梯度. Minty 弱向量似变分不等式(MWVVLI)[1,2] 是指寻找向量 $y \in X$，$\forall x \in X$，满足

$$(\langle \xi_1, \eta(y, x)\rangle, \langle \xi_2, \eta(y, x)\rangle, \cdots, \langle \xi_l, \eta(y, x)\rangle) \notin \mathrm{int}\mathbb{R}^l_+ \qquad \forall \xi_i \in \partial f_i(x)$$

文献[1, 2] 在 f_i $(i=1,\cdots,l)$ 为不变凸函数的条件下，讨论 MWVVLI 解的存在性问题以及 MWVVLI 与向量优化问题(VOP)

$$\min_{\mathbb{R}^l_+} f(x), \ \mathrm{st}: x \in X$$

的弱有效解之间的关系问题. 本文主要目的是在相对较弱的条件下，讨论 Minty 弱向量似变分不等式解的存在性问题以及非可微非凸函数与 Minty 弱向量似变分不等式解之间的关系.

1　预备知识

设 X 表示 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集，η: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 表示向量值函数，f_i: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i=1,\cdots,l)$ 表示非可微实值函数，$I=\{1, 2, \cdots, l\}$ 表示指标集，$\mathrm{int}\mathbb{R}^l_+$ 表示 $\mathbb{R}^l_+$ 的内点.

定义 1[3]　设函数 f : $X \longrightarrow R$ 在点 $x \in X$ 附近满足局部 Lipschitz 条件，f 在点 x 处沿方向 $v \in \mathbb{R}^n$ 的 Clarke 方向导数定义为

$$f^{\circ}(x; v) = \limsup_{y \to x,\, t \downarrow 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

定义 2[3]　设函数 f: $X \longrightarrow \mathbb{R}$ 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 附近满足局部 Lipschitz 条件，则

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* ; f^{\circ}(x; v) \geqslant \langle \zeta, v\rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n\}$$

称为函数 f 在点 x 的广义梯度.

定义 3[4]　设 f 在子集 X 上满足局部 Lipschitz 条件，如果 $\forall x, y \in X$，满足

$$f(y)-f(x) \geqslant \langle \xi, \eta(y, x)\rangle \qquad \forall \xi \in \partial f(x)$$

则称 f 是 X 上关于 η 的不变凸函数.

定义 4[4]　设 f 在子集 X 上满足局部 Lipschitz 条件，那么

---

① 收稿日期：2008-04-23
基金项目：国家自然科学基金资助课题(69972036).
作者简介：朱石焕(1964-)，男，河南渭县人，副教授，主要从事应用泛函分析的研究.

(i) 如果 $\forall x,y\in X$，$\forall \xi\in\partial f(x)$ 满足有 $\langle \xi,\ \eta(y,\ x)\rangle\geqslant 0$，就有 $f(y)\geqslant f(x)$，则称函数 f 为伪不变凸函数；

(ii) 如果 $\forall x,y\in X$，$x\neq y$，$\forall \xi\in\partial f(x)$ 满足有 $\langle \xi,\ \eta(y,\ x)\rangle\geqslant 0$，就有 $f(y)\geqslant f(x)$，则称函数 f 为严格伪不变凸函数.

定义 5[4]　设 f 在子集 X 上满足局部 Lipschitz 条件，那么

(i) 如果对于任意的 $x,y\in X$ 以及任意的 $\xi\in\partial f(x)$，$\zeta\in\partial f(y)$，满足有 $\langle\xi,\eta(y,\ x)\rangle\geqslant 0$，就有 $\langle\zeta,\ \eta(x,\ y)\rangle\leqslant 0$，则称 $\partial f(x)$ 为不变伪单调映射；

(ii) 如果对于任意的 $x,y\in X$，$x\neq y$，以及任意的 $\xi\in\partial f(x)$，$\zeta\in\partial f(y)$，满足有 $\langle\xi,\eta(y,\ x)\rangle\geqslant 0$，就有 $\langle\zeta,\ \eta(x,\ y)\rangle<0$，则称 $\partial f(x)$ 为严格不变伪单调映射.

性质 1　$\partial f(x)$ 是 X 上的不变伪单调映射的充分必要条件是对于 X 上任意不同的两点 $x,y\in X$ 以及任意的 $\xi\in\partial f(x)$，$\zeta\in\partial f(y)$，若 $\langle\xi,\ \eta(y,\ x)\rangle>0$，则 $\langle\zeta,\ \eta(x,\ y)\rangle<0$.

证　由定义 5 可知，不变伪单调性等价于 $\forall\xi\in\partial f(x)$，$\forall\zeta\in\partial f(y)$，若

$$\langle\zeta,\ \eta(x,\ y)\rangle>0$$

则

$$\langle\xi,\ \eta(y,\ x)\rangle<0$$

交换不等式中的 x 和 y 可得结论.

定义 6[2]　设 f：$X\longrightarrow\mathbb{R}^l$，若

$$f(x)-f(y)\notin -\operatorname{int}\mathbb{R}^l_+\qquad \forall x\in X$$

则称 $y\in X$ 是 VOP 的弱有效解.

引理 1[5]　设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空凸子集，集值映射 S，T：$X\multimap X$ 满足下列条件：

(i) $\forall x\in X$，$\operatorname{co}S(x)\subseteq T(x)$；

(ii) $\forall x\in X$，$x\notin T(x)$，并且 $S^{-1}(x)$ 是开集；

(iii) 存在非空紧凸子集 $B\subset X$ 和非空紧子集 $M\subset X$，$\forall x\in X\backslash M$，存在 $z\in B$ 满足 $x\in S^{-1}(z)$.
则存在 $\bar{x}\in X$ 满足 $S(\bar{x})=\varnothing$.

2　主要结果

定理 1　设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空凸子集，f_i $(i\in I)$ 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件，如果下列条件成立：

(i) $\partial f_i(x)(i\in I)$ 是不变伪单调映射；

(ii) η 关于第一个变量是仿射的，并且 $\forall x\in X$，$\eta(x,\ x)=0$；

(iii) 存在非空紧凸子集 $B\subset X$ 和非空紧子集 $M\subseteq X$，$\forall x\in X\backslash M$，存在 $z\in B$，满足

$$(\langle u_1,\eta(x,\ z)\rangle,\langle u_2,\eta(x,\ z)\rangle,\cdots,\langle u_l,\eta(x,\ z)\rangle)\in\operatorname{int}\mathbb{R}^l_+\qquad\forall u_i\in\partial f_i(z)$$

则存在 $y\in X$，$\forall x\in X$，满足

$$(\langle\xi_1,\eta(y,\ x)\rangle,\langle\xi_2,\eta(y,\ x)\rangle,\cdots,\langle\xi_l,\eta(y,\ x)\rangle)\notin\operatorname{int}\mathbb{R}^l_+\qquad\forall\xi_i\in\partial f_i(x)$$

证　定义集值映射 P,Q：$X\multimap X$ 分别为

$$P(y)=\{x\in X:(\langle\xi_1,\eta(y,\ x)\rangle,\langle\xi_2,\eta(y,\ x)\rangle,\cdots,\langle\xi_l,\eta(y,\ x)\rangle)\in\operatorname{int}\mathbb{R}^l_+,\ \forall\xi_i\in\partial f_i(x)\}$$

$$Q(y)=\{x\in X:(\langle\zeta_1,\eta(x,\ y)\rangle,\langle\zeta_2,\eta(x,\ y)\rangle,\cdots,\langle\zeta_l,\eta(x,\ y)\rangle)\in -\operatorname{int}\mathbb{R}^l_+,\ \forall\zeta_i\in\partial f_i(y)\}$$

因 $\partial f_i(x)(i\in I)$ 是伪不变单调映射，$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，由性质 1 可得，若

$$\langle\xi_i,\ \eta(y,\ x)\rangle>0\qquad\forall\xi_i\in\partial f_i(x)$$

则

$$\langle\zeta_i,\ \eta(x,\ y)\rangle<0\qquad\forall\zeta_i\in\partial f_i(y)$$

因此 $P(y)\subseteq Q(y)$.

任取 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p\in Q(y)$，则有

$$(\langle\zeta_1,\eta(x_j,\ y)\rangle,\langle\zeta_2,\eta(x_j,\ y)\rangle,\cdots,\langle\zeta_l,\eta(x_j,\ y)\rangle)\in -\operatorname{int}\mathbb{R}^l_+\qquad\forall\zeta_i\in\partial f_i(y),\ j=1,2,\cdots,p$$

设 $\alpha_j\geqslant 0$，$\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_j=1$，$z=\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_j x_j$，由条件(ii)，$\eta$ 关于第一个变量是仿射的，可以得到

$$(\langle\zeta_1,\eta(\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x_j,\ y)\rangle,\ \langle\zeta_2,\eta(\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x_j,\ y)\rangle,\ \cdots,\ \langle\zeta_l,\eta(\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x_j,\ y)\rangle)\in -\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l \qquad \forall\,\zeta_i\in\partial f_i(y)$$

因此 $z\in Q(y)$，则 $Q(y)$ 是凸集，因此 $\mathrm{co}P(y)\subseteq Q(y)$.

若存在 $y\in X$ 满足 $y\in Q(y)$，则有

$$(\langle\zeta_1,\eta(y,\ y)\rangle,\ \langle\zeta_2,\eta(y,\ y)\rangle,\ \cdots,\ \langle\zeta_l,\eta(y,\ y)\rangle)\in -\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l \qquad \forall\,\zeta\in\partial f_i(y) \tag{1}$$

因 $\eta(x,\ x)=0$，$\forall\,x\in X$. (1) 式等价于 $0\in -\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l$，矛盾. 因此 $\forall\,y\in X$，$y\notin Q(y)$.

由映射 P 的定义可得

$$P^{-1}(x)=\{y\in X:(\langle\xi_1,\eta(y,\ x)\rangle,\ \langle\xi_2,\eta(y,\ x)\rangle,\ \cdots,\ \langle\xi_l,\eta(y,\ x)\rangle)\in\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l,\ \forall\,\xi_i\in\partial f_i(x)\}$$

下证对 $\forall\,x\in X$，$P^{-1}(x)$ 是开集. 设

$$P_i^{-1}(x)=\{y\in X:\langle\xi_i,\eta(y,\ x)\rangle>0,\ \forall\,\xi_i\in\partial f_i(x)\}$$

则 $P^{-1}(x)=\bigcap_{i=1}^{l}P_i^{-1}(x)$. $\forall\,x\in X$，设 $y_0\in P_i^{-1}(x)$，定义函数

$$h_i(x)=\inf_{\xi_i\in\partial f_i(x)}\langle\xi_i,\ \eta(y_0,\ x)\rangle$$

因 $\partial f_i(x)(\forall\,i\in I)$ 是紧集(参见文献[3])，则存在 $\zeta_i\in\partial f_i(x)$，满足 $h_i(x)=\langle\zeta_i,\ \eta(y_0,\ x)\rangle$. 因 η 关于第一个变量仿射，因此是连续的，则集合 $\{y\in X:\langle\zeta_i,\eta(y,\ x)\rangle>0\}$ 是包含 y_0 的开集. 显然

$$\{y\in X:\langle\zeta_i,\eta(y,\ x)\rangle>0\}\subset P_i^{-1}(x)$$

因而 $P^{-1}(x)$ 是开集.

由条件(iii) 可知，存在非空紧凸子集 $B\subset X$ 和非空紧子集 $M\subset X$，$\forall\,x\in X\backslash M$，存在 $z\in B$，满足 $x\in P^{-1}(z)$. 由引理 1 可得，存在 $y\in X$，满足 $P(y)=\varnothing$，因此，$\forall\,x\in X$，有

$$(\langle\xi_1,\eta(y,\ x)\rangle,\ \langle\xi_2,\eta(y,\ x)\rangle,\ \cdots,\ \langle\xi_l,\eta(y,\ x)\rangle)\notin\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l \qquad \forall\,\xi_i\in\partial f_i(x)$$

推论 1　设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空紧凸子集，$f_i(i\in I)$ 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件，如果定理 1 的条件(i) 和(ii) 成立，则存在 $y\in X$，$\forall\,x\in X$，满足

$$(\langle\xi_1,\eta(y,\ x)\rangle,\ \langle\xi_2,\eta(y,\ x)\rangle,\ \cdots,\ \langle\xi_l,\eta(y,\ x)\rangle)\notin\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l,\ \forall\,\xi_i\in\partial f_i(x)$$

注 1　若 f 是伪不变凸函数，文献[6] 给出了在一定条件下，∇f 是不变伪单调映射. 若 f 是严格伪不变凸函数，则有下面结论.

推论 2　设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空紧凸子集，映射 η 关于第一个变量是仿射的，并且 $\forall\,x\in X$，$\eta(x,\ x)=0$. 如果 $f_i:X\longrightarrow\mathbb{R}(i\in I)$ 是关于 η 的严格伪不变凸函数，并且满足局部 Lipschitz 条件，则存在 $y\in X$，$\forall\,x\in X$，满足

$$(\xi_1,\eta(y,\ x)\rangle,\ \langle\xi_2,\eta(y,\ x)\rangle,\ \cdots,\ \langle\xi_l,\eta(y,\ x)\rangle)\notin\mathrm{int}\,\mathbb{R}_+^l \qquad \forall\,\xi_i\in\partial f_i(x)$$

证　只需证明 $\partial f_i(x)(i\in I)$ 满足定理 1 条件(i). 任取 $x,y\in X$，$x\neq y$，设

$$\langle\xi_i,\ \eta(y,\ x)\rangle\geqslant 0 \qquad \forall\,\xi_i\in\partial f_i(x),\ i\in I \tag{2}$$

我们需要证明

$$\langle\zeta_i,\ \eta(x,\ y)\rangle\leqslant 0 \qquad \forall\,\zeta_i\in\partial f_i(y),\ i\in I \tag{3}$$

如果(3) 式不成立，则存在 $i\in I$，$\zeta_i\in\partial f_i(y)$，使

$$\langle\zeta_i,\eta(x,\ y)\rangle>0 \tag{4}$$

因 $f_i(i\in I)$ 是关于 η 的严格伪不变凸函数，由式(4) 得

$$f_i(x)>f_i(y)$$

而由式(2) 得

$$f_i(x)<f_i(y) \qquad \forall\,i\in I$$

两式矛盾. 因此 $\partial f_i(x)(i\in I)$ 是不变伪单调映射. 由推论 1 可知结论成立.

推论 3　设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空紧凸子集，映射 $\eta:X\times X\longrightarrow X$ 关于第一个变量是仿射的，并且满足 $\eta(x,\ y)+\eta(y,\ x)=0$，$\forall\,x,y\in X$. 如果 $f_i:X\rightarrow\mathbb{R}(i\in I)$ 是关于 η 不变凸函数，并且满足局部 Lipschitz 条件，则 VOP 存在弱有效解.

证　因 $f_i: X \longrightarrow \mathbb{R}\ (i \in I)$ 是关于 η 的不变凸函数，则 $\partial f_i\ (i \in I)$ 是不变单调映射[4]，因此是不变伪单调映射. 由条件 $\eta(x,y) + \eta(y,x) = 0$，$\forall x, y \in X$，可知 $\eta(x,x) = 0$，$\forall x \in X$. 由推论 1 可知 MWVVLI 存在解. 由文献[1]可知，$y \in X$ 是 MWVVLI 的解的充分必要条件是 y 是 VOP 的弱有效解. 因此，VOP 存在弱有效解.

参考文献：

[1] Ansari Q H，Yao J C. On Nondifferentiable and Nonconvex Vector Optimization Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2000，106(3)：475－488.

[2] Lucelina Batista Santos，Marko A. Rojas-Medar and Antonio Rufia N-Lizana，Some Relations Between Variational-like Inequalities and Efficient Solutions of Certain Nonsmooth Optimization Problems [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences，2006，268(8)：1－16.

[3] Clarke F H，Stern R J，Ledyaev Y S，et al. Nonsmooth Analysis and Control Theory [M]. New York：Springer，1998.

[4] Jabarootian T，Zafarani J. Generalized Invariant Monotonicity and Invexity of Non-differentiable Functions [J]. Journal of Global Optimization，2006，36(4)：537－564.

[5] Lin L J，Yu Z T，Ansari Q H，et al. Fixed Point and Maximal Element Theorems with Applications to Abstract Economies and Minimax Inequalities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2003，284：656－671.

[6] Yang X M，Yang X Q，Teo K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2000，106(3)：475－488.

[7] 周　彦，邓　磊. 多值一般混合似变分不等式的可解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(6)：952－955.

[8] 王庆东，侯海军，肖　刚. Minty 向量似变分不等式与向量优化问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2008，30(6)：932－935.

[9] 羊　琴，邓　磊. 关于 G－f－η 单调算子的完全广义非线性隐似变分包含问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，32(8)：945－948.

On the Solution Existence of Minty Weak Vector Variational-like Inequality

ZHU Shi-huan

Department of Mathematics，Anyang Normal College，Anyang Henan 455002，China

Abstract：The solution existence of Minty weak vector variational-like inequality problem is studied. The relations between the solutions of Minty weak vector variational-like inequalities and the nonsmooth and nonconvex functions as well as the existence of weakly efficient solutions of nonsmooth vector optimization problem are given. The results show generalizations of those presented by Ansari and Lucelina.

Key words：Minty vector variational-like inequality；invex；pseudoinvex；invariant pseudomonotone

责任编辑　覃吉康