文章编号：1000-5471(2008)05-0022-04

# 距离空间的一个公共不动点定理①

周　敏

川北医学院 数学教研室，四川 南充 637007

**摘要**：引入了渐近正则映象对概念. 在适当条件下证明了完备距离空间中渐近正则映象对公共不动点的存在定理.

**定理 1**　设 $T$,$S$ 是连续的渐近正则映象对，且满足如下条件：

① 存在 $\varphi \in \Phi_1$，使得 $d(Tx, Sy) \leqslant \varphi(D(x, y))$，$\forall x, y \in X$；

② $d(Tx, Sy) < D(x, y)$，$\forall x, y \in X$ 且 $x \neq y$.

那么 $T$ 和 $S$ 有唯一的公共不动点.

**关　键　词**：不动点定理；渐近正则映象对；完备距离空间；存在性

**中图分类号**：O177.91　　**文献标识码**：A

近年来，许多作者将著名的 Banach 不动点定理进行了扩充和推广[1-15].

设$(X, d)$为距离空间，$T: X \longrightarrow X$ 为自映象. 称 $T$ 是压缩的[5]，如果 $d(Tx, Ty) < kd(x, y)$，$\forall x, y \in X$ 且 $0 < k < 1$；称 $T$ 是渐近正则的[4]，若$\lim\limits_{n\to\infty} d(T^n x, T^{n+1} x) = 0$，$\forall x \in X$.

下面引进渐近正则映象对的概念.

**定义 1**　设 $T$,$S$: $X \longrightarrow X$，称 $T$ 和 $S$ 是渐近正则映象对，若 $T$ 和 $S$ 都是渐近正则的，且对 $\forall x \in X$，满足

$$\lim_{n\to\infty}(T^n x, S^{n+1} x) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(T^{n+1} x, S^n x) = 0$$

如果 $S = T$，则渐近正则映象对的概念就退化为渐近正则概念.

我们用 $\Phi_1$ 表示满足如下条件的函数 $\varphi$ 的集合，其中 $\varphi$: $R_+ \longrightarrow R_+$ 满足：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > \varepsilon$，使当 $\varepsilon < \tau < \delta$ 时总有 $\varphi(\tau) \leqslant \varepsilon$.

文献[11]用

$$D(x, y) = d(x, y) + v[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \qquad \forall v \geqslant 0$$

代替

$$m(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}$$

得到了一个新的不动点定理，其中 $T$: $X \longrightarrow X$ 是渐近正则的.

本文的目的就是在文献[11]结果的基础上，进一步考虑我们所引入的渐近正则映象对的公共不动点的存在性问题. 在适当条件下，我们证明在完备距离空间中渐近正则映象对存在唯一的公共不动点.

---

①　收稿日期：2008-01-07

作者简介：周　敏(1959-)，男，四川盐亭人，副教授，主要从事高等数学、应用数学的教学和研究.

在本文中，我们总假设 $T,S: X \longrightarrow X$，其中$(X, d)$是一完备距离空间，且

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Sy)$$

如果 $S = T$，则

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty)$$

**定理 1**　设 $T,S$ 是连续的渐近正则映象对，且满足如下条件：

① 存在 $\varphi \in \Phi_1$，使得 $d(Tx, Sy) \leqslant \varphi(D(x, y))$，$\forall x,y \in X$；

② $d(Tx, Sy) < D(x, y)$，$\forall x,y \in X$ 且 $x \neq y$.

那么 $T$ 和 $S$ 有唯一的公共不动点.

**证**　令 $x_n = T^n x$，$y_n = S^n x$，其中 $x$ 任给定. 我们需要证明$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是 Cauchy 列. 由 $T$ 和 $S$ 的对称性，故我们只需要证明$\{x_n\}$是 Cauchy 列，类似可以证明$\{y_n\}$也是 Cauchy 列.

为此，我们令

$$E_n(T) = d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1})$$

$$E_n(S) = d(y_n, Sy_n) = d(y_n, y_{n+1})$$

$$E_n(T, S) = d(x_n, y_{n+1}) = d(T^n x, S^{n+1} x)$$

任给定 $\varepsilon > 0$，因 $\varphi \in \Phi_1$，故存在 $\delta > \varepsilon$，使当 $\tau$ 满足 $\varepsilon < \tau < \delta$ 时，有

$$\varphi(\tau) \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

不失一般性，可假设 $\delta < 6\varepsilon$. 因为 $T$ 和 $S$ 是渐近正则映象对，所以有 $E_n(T) \to 0$，$E_n(S) \to 0$ 以及 $E_n(T, S) \to 0$. 这样一来，就存在 $N_0 \geqslant 1$，使得

$$E_n(T) < \frac{\delta - \varepsilon}{5} \qquad E_n(S) < \frac{\delta - \varepsilon}{5} \qquad E_n(T, S) < \frac{\delta - \varepsilon}{5} \qquad \forall n \geqslant N_0$$

下面，我们证明，对 $\forall m,n \in \mathbf{N}$，且 $m \geqslant n \geqslant N_0$，有

$$d(x_n, x_m) < \frac{\delta + 4\varepsilon}{5} \tag{2}$$

固定 $n \geqslant N_0$，显然当 $m = n$ 时 (2) 式成立. 假设(2) 式在 $m \geqslant n$ 时成立，那么根据数学归纳法，我们要证明(2) 式对 $m + 1$ 也成立.

根据三角不等式有

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{m+1}) &\leqslant d(x_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, x_{m+1}) \\ &= d(T^n x, S^{n+1} x) + d(Tx_m, Sy_n) \\ &= E_n(T, S) + d(Tx_m, Sy_n) \end{aligned} \tag{3}$$

可以断言

$$d(Tx_m, Sy_n) \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

事实上，如果 $D(x_m, y_n) \leqslant \varepsilon$，那么根据条件 ② 有，当 $x_m \neq y_n$ 时

$$d(Tx_m, Sy_n) < D(x_m, y_n) \leqslant \varepsilon$$

当 $x_m = y_n$ 时

$$\begin{aligned} d(Tx_m, Sy_n) &\leqslant d(Tx_m, x_m) + d(x_m, Sy_n) \\ &= d(Tx_m, x_m) + d(y_n, Sy_n) \\ &= d(x_m, y_n) + d(x_m, Tx_m) + d(y_n, Sy_n) \\ &= D(x_m, y_n) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

这即是，在 $D(x_m, y_n) \leqslant \varepsilon$ 的情况下，有 $d(Tx_m, Sy_n) \leqslant \varepsilon$ .

如果 $D(x_m, y_n) > \varepsilon$，则由条件 ① 有

$$d(Tx_m, Sy_n) \leqslant \varphi(D(x_m, y_n)) \tag{5}$$

根据 $D(x, y)$ 定义知

$$\begin{aligned} D(x_m, y_n) &= d(x_m, y_n) + d(x_m, Tx_m) + d(y_n, Sy_n) \\ &\leqslant d(x_m, x_n) + d(x_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_n) + d(x_m, Tx_m) + d(y_n, Sy_n) \\ &= d(x_m, x_n) + E_n(T, S) + E_m(T) + 2E_n(S) \\ &< \frac{\delta + 4\varepsilon}{5} + 4 \times \frac{\delta - \varepsilon}{5} \qquad \text{(由假设知)} \\ &= \delta \end{aligned}$$

于是 $\varepsilon < D(x_m, y_n) < \delta$，根据(1)式知 $\varphi(D(x_m, y_n)) \leqslant \varepsilon$，再由(5)式知

$$d(Tx_m, Sy_n) \leqslant \varepsilon$$

从而(4)式成立．根据(3),(4)可得

$$d(x_n, x_{m+1}) \leqslant \frac{\delta - \varepsilon}{5} + \varepsilon = \frac{\delta + 4\varepsilon}{5}$$

故(2)式成立．由于 $\delta < 6\varepsilon$，故对 $\forall m, n \in \mathbf{N}$ 且 $m \geqslant n \geqslant N_0$，有

$$d(x_n, x_m) \leqslant \frac{\delta + 4\varepsilon}{5} < \frac{6\varepsilon + 4\varepsilon}{5} = 2\varepsilon$$

这表明 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列．由于 $X$ 完备，故存在 $a \in X$ 使得 $x_n \to a$，再由 $T$ 连续，可得 $x_n = Tx_{n-1} \to Ta$．由极限唯一性可知 $Ta = a$，即 $a$ 为 $T$ 的不动点．

类似地，可证 $y_n \to b \in X$．由于 $b$ 为 $S$ 的不动点，即 $b = Sb$．

下面证明 $a = b$．若不然 $a \neq b$，那么由条件 ② 知

$$d(a, b) = d(Ta, Sb) < D(a, b) = d(a, b) + d(a, Ta) + d(b, Sb) = d(a, b)$$

矛盾．

下面再证明唯一性．若 $c$ 也为 $T$ 和 $S$ 的公共不动点，即 $c = Tc = Sc$．若 $c \neq a$，那么由条件 ② 知

$$d(c, a) = d(Tc, Sa) < D(c, a) = d(c, a) + d(c, Tc) + d(a, Sa) = d(c, a)$$

矛盾．

在定理 1 中令 $T = S$，则有：

**推论 1**　设 $T$ 是连续的渐近正则的，且满足

① 存在 $\varphi \in \Phi_1$，使得 $d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(D(x, y))$，$\forall x, y \in X$；

② $d(Tx, Ty) < D(x, y)$，$\forall x, y \in X$ 且 $x \neq y$．

则 $T$ 有唯一的不动点．

**注 1**　定理 1 在文献[11]结果基础上，考虑了映象对的公共不动点存在性．

**参考文献：**


[1] Bianchini R M, Grandolfi M. Transformazioni Di Tipo Contracttivo Generalizzato in Unoapazio Metrico [J]. Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur, 1968, 45: 212－216.

[2] Boyd D W, Wong J S W. On Nonlinear Contractions [J]. Proc Am Math Soc, 1969, 20: 458－464.

[3] Browder F E. On the Convergence of Successive Approximations for Nonlinear Functional Equations [J]. Indag Math, 1968, 30: 27－35.

[4] Browder F E, Petryshyn W V. The Solution by Iteration of Nonlinear Functional Equations in Banach Spaces [J]. Bull Am Math Soc, 1966, 72: 571－575.

[5] Edelstein M. On Fixed and Periodic Points Under Contractive Mappings [J]. J London Math Soc, 1962, 37: 74－79.

[6] Furi M. Un Trorema Dip Unto Fisso Per Transformazioni Di Uno Spazio Metrico Complete in se [J]. Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur, 1968, 45: 207－211.

[7] Hegedus M, Szilagyi T. Equivalent Conditions and a New Fixed Point theorem in the Theory of Contractive Type Mappings [J]. Math Japon, 1980, 25: 147-157.

[8] Jachymski J. Equivalent Conditions and the Meir-Keeler Type Theorems [J]. J Math Anal Appl, 1995, 194: 293-303.

[9] Leader S. Fixed Points for Operators on Metric Spaces with Conditional Uniform Equivalence of Orbits [J]. J Math Anal Appl, 1977, 61: 466-474.

[10] Matkowski J. Fixed Point Theorems for Contractive Mappings in Metric Spaces [J]. Cas Pest Mat, 1980, 105: 341-344.

[11] Proinov P D. Ffixed Point Theorems in Metric Spaces [J]. Nonlinear Anal, 2006, 64: 546-557.

[12] Rakotch E. A Note on Contractive Mappings [J]. Proc Am Math Soc, 1962, 13: 459-465.

[13] Zitarosa A. Una Generalizzazione Del teorema Di Banach Sulle Contrazioni [J]. Matematiche, 1968, 23: 417-424.

[14] SHI Hong-bo. The Fixed Point Theorem of Convex-power Condensing Operator and its Applications in Locally Convex Spaces [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(9): 1-5.

[15] YANG Ming-ge, ZHANG Yu-lan, DENG Lei. An Intersection Theorem in FC Spaces and its Applications [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2008, 30(4): 45-48.

# A Common Fixed Point Theorem in Complete Metric Spaces

ZHOU　Min

*Department of math ematics, North Sichuan Medical College, Nanchong Sichuan 637007, China*

**Abstract**: In this paper, by introducing the concept of a couple of asymptotically reqular mappings, a existence theorem of common fixed point is derived under suitable assumptions in complete metric spaces.

**Theorem 1**　Assume that $T$ and $S$ are a couple of continuous asymptotically regular maps. If the following conditions hold:

① there is $\varphi \in \Phi_1$ such that $d(Tx, Sy) \leqslant \varphi(D(x, y))$, $\forall x, y \in X$;

② $d(Tx, Sy) < D(x, y)$, $\forall x, y \in X$ with $x \neq y$.

Then $T$ and $S$ have a unique common fixed point.

**Key words**: fixed point theorems; a couple of asymptotically reqular mappings; complete metric space; existence

责任编辑　覃吉康