第 33 卷　第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 10 月
Vol. 33　No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2008

文章编号：1000-5471(2008)05-0015-03

I-析取 ω-语言的几个性质①

刘祖华[1]，　曹春华[2]

1. 昆明学院 数学系，昆明 650031；2. 云南大学 数学与统计学院，昆明 650031

摘要： 主要证明了在 X^ω 中不存在极大和极小 I-析取 ω-语言，提出 I-析取辖区概念并证明其是稠密语言.

关　键　词： I-析取 ω-语言；I-析取辖区；I-稠密

中图分类号： O152.1　　　　**文献标识码：** A

令 X 是至少含有两个元素的有限字母表. X 上的所有有限字和空字 1 的集合记为 X^*. 由 X 上所有无限字(或称 ω-字)作成的集合记为 X^ω，X^ω 的子集称之为 ω-语言. 对于给定的 ω-语言 L，我们定义 X^* 上的二元关系 I_L 如下：

(i) $u \equiv v\ (I_L)$ 当且仅当 $\forall x, y \in X^*$；

(ii) $x(uy)^\omega \in L$ 当且仅当 $x(vy)^\omega \in L$.

其中 $u, v \in X^*$. 这样定义的二元关系 I_L 是 X^* 上的同余关系. 文献[1] 称 I_L 为无限句法同余(infinitary syntactic congruence).

若 I_L 是 X^* 上的相等关系(equality relation)，则称 L 为 I-析取 ω-语言(I-disjunctive ω-language).

L 称为 I-稠密(I-dense)，如果满足对 $\forall u \in X^*$，存在 $x, y \in X^*$，使得 $x(uy)^\omega \in L$.

L 称为 I-离散(I-discrete)，如果满足对 $\forall u \neq v \in X^*$，若$\{xu^\omega, xv^\omega\} \subseteq L$，则 $\lg(u) \neq \lg(v)$，$x \in X^*$.

定义 1　语言 $D \subseteq X^*$ 称为 I-析取辖区(I-disjunctive domain)，如果 D 满足：对任意的 $L \subseteq X^\omega$，若 I_L 在 D 上是相等关系，则 L 是 I-析取 ω-语言.

文献[2] 性质 1 说明本原字集 Q 是 I-析取辖区.

定理 1　令有限字母表 $X = \{a, b, \cdots, c\}$，$D \subseteq X^*$. 若 D 是 I-析取辖区，则 D 是稠密语言.

证　定义 X^* 上的全序"$<$"如下：对于任意 $x, y \in X^*$，若 $\lg(x) < \lg(y)$，则 $x < y$；若 $\lg(x) = \lg(y) = n$，则"$<$"是 X^n 上的字典序(lexicographic order). 令 $X^* = \{u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < u_n < \cdots\}$. 我们利用 I-析取辖区 D 作语言 $L = \{x' \mid x \in D\backslash\{1\}\}$，其中

$$x' = \begin{cases} xa^n & x \notin X^*a,\ n = \#x \\ xb^n & x \in X^*a,\ n = \#x \end{cases}$$

这里的 $\#x$ 就是 x 在全序 X^* 中的第几个位置，显然 x 与 x' 是一一对应的. 由于 $\lg(x) < \#x$，所以 x' 是本原字，即 $L \subseteq Q$. 令 $L^{(\omega)} = \{u^\omega \mid u \in L\}$. 下证 $I_{L^{(\omega)}}$ 在 D 上是相等关系.

首先，令 $x, y \in D\backslash\{1\}$，$x \neq y$. 不妨设 $\#x > \#y$，$\#x = n$.

(i) 若 $x \notin X^*a$，则存在空字 1 和 a^n，使得 $1(xa^n)^\omega = (xa^n)^\omega \in L^{(\omega)}$. 假设 $1(ya^n)^\omega = (ya^n)^\omega \in L^{(\omega)}$，由 $L^{(\omega)}$ 的定义知，存在 $z \in D\backslash\{1\}$，$\#z = m$，使得$(ya^n)^\omega = (z')^\omega$. 若 $z \notin X^*a$，则$(ya^n)^\omega = (za^m)^\omega$. 令 $\lg(ya^n) = p$，$\lg(za^m) = q$. 则$(ya^n)^q = (za^m)^p$. 由文献[3] 推论 4.1 知，ya^n 与 za^m 是同一字的幂，又因为 ya^n，za^m 是本原字，所以 $ya^n = za^m$. 下面对 y 与 z 的长度进行讨论：若 $\lg(y) < \lg(z)$，则存在 $z_1 \in X^+$，使得 $z = yz_1$，$a^n = z_1a^m$. 但 $z \notin X^*a$，且 z_1 是 z 的后缀，从而 $z_1 \notin X^*a$，即字 z_1 末尾的字母不是 a，与

---

① 收稿日期：2008-02-22
作者简介：刘祖华(1981-)，男，广东佛冈人，硕士，主要从事组合半群的研究.

$a^n = z_1 a^m$ 矛盾．若 $\lg(y) \geqslant \lg(z)$，则 $y = za^l$，$l + n = m$，l 为大于或等于0的整数．由 $y = za^l$ 知，$\# y \geqslant \# z$．又 $\# x > \# y$，从而 $n = \# x > \# z = m$，即 $n > m$，与 $l + n = m$ 矛盾．若 $z \in X^* a$，则 $(ya^n)^\omega = (zb^m)^\omega$，从而 $ya^n = zb^m$．但 a, b 是两个不同的字母，所以 $ya^n \neq zb^m$，矛盾．因此，假设不成立，故 $(ya^n)^\omega \notin L^{(\omega)}$，即 $x \not\equiv y(I_{L^{(\omega)}})$．

(ii) 若 $x \in X^* a$，则可类似证明 存在空字1和 b^n，使得

$$1(xb^n)^\omega = (xb^n)^\omega \in L^{(\omega)} \qquad 1(yb^n)^\omega = (yb^n)^\omega \notin L^{(\omega)}$$

从而 $x \not\equiv y(I_{L^{(\omega)}})$．

其次，对任意 $x \in D \backslash \{1\}$，不妨设 $x = x_1 a$，$x_1 \in X^*$，$\# x = n$．则存在空字1和 $b^n \in X^*$，使得

$$1(xb^n)^\omega = (xb^n)^\omega \in L^{(\omega)} \qquad 1(1b^n)^\omega = (b^n)^\omega \notin L^{(\omega)}$$

从而 $x \not\equiv 1(I_{L^{(\omega)}})$．

综上，$\forall x, y \in D$，$x \neq y$，$x \not\equiv y(I_{L^{(\omega)}})$．

又 D 是 I-析取辖区，从而 $L^{(\omega)}$ 是 I-析取 ω-语言．由文献[2]的推论10知，L 是稠密语言．假设 D 不是稠密语言，则存在 $w \in X^+$，使得 $X^* w X^* \cap D = \varnothing$．由于 L 是稠密语言，从而对于 wk(其中 k 是与 w 的末字母互异的字母)，存在 $u, v \in X^*$，使得 $uwkv \in L$．由 L 的作法知，$uwv_1 \in D$，其中 v_1 是 kv 的前缀，与 $X^* w X^* \cap D = \varnothing$ 矛盾．因此，D 是稠密语言．

定理2 令 $L \subseteq X^\omega$．若 L 是 I-析取 ω-语言，则 $L' = L \cap X^*(X^+)^{(\omega)}$ 是 I-析取 ω-语言．也就是说，I-析取 ω-语言中所有最终周期字所作的集合还是 I-析取 ω-语言．

证 在 X^* 中任取两个不同的字 u, v．由 L 是 I-析取 ω-语言可知，存在 $x, y \in X^*$，使得 $x(uy)^\omega \in L$，$x(vy)^\omega \notin L$ 或 $x(vy)^\omega \in L$，$x(uy)^\omega \notin L$．不妨设 $x(uy)^\omega \in L$，$x(vy)^\omega \notin L$．由 L' 的作法可知，$x(uy)^\omega \in L'$，$x(vy)^\omega \notin L'$．因此 $u \not\equiv v\,(I_{L'})$，故 L' 是 I-析取 ω-语言．

定理3 令 $L_1 \subseteq X^\omega$ 是 I-析取 ω-语言，L_2 是 $X^\omega \backslash X^*(X^+)^{(\omega)}$ 中任一子集．则 $L = L_1 \cup L_2$ 是 I-析取 ω-语言．

证 在 X^* 中任取两个不同的字 u, v．由 L_1 是 I-析取 ω-语言可知，存在 $x, y \in X^*$，使得 $x(uy)^\omega \in L_1$，$x(vy)^\omega \notin L_1$ 或 $x(vy)^\omega \in L_1$，$x(uy)^\omega \notin L_1$．不妨设 $x(uy)^\omega \in L_1$，$x(vy)^\omega \notin L_1$．由 L 的作法可知，$x(uy)^\omega \in L$，又 $x(vy)^\omega$ 是最终周期字，$x(vy)^\omega \notin L_2$，从而 $x(vy)^\omega \notin L$，于是 $u \not\equiv v\,(I_L)$．故 L 是 I-析取 ω-语言．

定理3表明 I-析取 ω-语言与任一非最终周期字集的并还是 I-析取 ω-语言．

定理4 令 $L \subseteq X^\omega$ 是一个 I-析取 ω-语言．若 $L = L_1 \cup L_2$ 且 $L_1 \cap L_2 = \varnothing$，则下面两条中至少有一个成立．

(i) L_1 和 L_2 至少有一个是 I-析取 ω-语言；

(ii) L_1 和 L_2 都包含 I-析取 ω-语言．

证 假设(ii)不成立，即 L_1 和 L_2 中至少有一个不包含 I-析取 ω-语言．由文献[2]的定理9知，L_1 和 L_2 两者中至少有一个不是 I-稠密．不妨设 L_1 不是 I-稠密，则存在 $w \in X^*$，对 $\forall x, y \in X^*$，有

$$x(wy)^\omega \notin L_1 \tag{1}$$

下证对任意的 $u, v \in X^*$，若 $u \equiv v\,(I_{L_2})$，则 $u = v$．事实上，由同余性质得

$$wu \equiv wv(I_{L_2}) \tag{2}$$

若对 $\forall x_1, y_1 \in X^*$，有 $x_1(wuy_1)^\omega \in L$，则由(1)知，$x_1(wuy_1)^\omega \notin L_1$，于是 $x_1(wuy_1)^\omega \in L_2$．又由(2)可知，$x_1(wvy_1)^\omega \in L_2$，即 $x_1(wvy_1)^\omega \in L$．同理可得，对 $\forall x_1, y_1 \in X^*$，若 $x_1(wvy_1)^\omega \in L$，则 $x_1(wuy_1)^\omega \in L$．因此 $wu \equiv wv\,(I_L)$．又 L 是 I-析取 ω-语言，于是 $wu = wv$，从而 $u = v$．故 L_2 是 I-析取 ω-语言，(i)成立．

注 因为 I-稠密且 I-离散的 ω-语言是 I-析取 ω-语言(见文献[2])，所以此定理又可改写成：若 I-离散的 I-析取 ω-语言 $L = L_1 \cup L_2$ 且 $L_1 \cap L_2 = \varnothing$，则 L_1 或者 L_2 是 I-析取 ω-语言．

推论1 令 $L \subseteq X^\omega$ 是 I-析取 ω-语言，L_1 是 L 的一个有限子集．则 $L \backslash L_1$ 是 I-析取 ω-语言．

证 $L = (L \backslash L_1) \cup L_1$ 且 $(L \backslash L_1) \cap L_1 = \varnothing$．由于 I-稠密 ω-语言是无限集，所以有限集 L_1 不是 I-稠密．由定理4知，$L \backslash L_1$ 是 I-析取 ω-语言．

推论2 令 $L \subseteq X^\omega$ 是 I-析取 ω-语言．若 $L_1 \subseteq X^\omega$ 是有限集且 $L \cap L_1 = \varnothing$，则 $L \cup L_1$ 是 I-析取 ω

-语言.

证　由 L 是 I -析取 ω -语言知，$\bar{L}$ 也是 I -析取 ω -语言. 由于 $L \cap L_1 = \emptyset$，从而 $L_1 \subseteq \bar{L}$. 根据推论 1，$\bar{L} \backslash L_1$ 是 I -析取 ω -语言. 因此，$\bar{L} \backslash L_1$ 的补集 $L \cup L_1$ 也是 I -析取 ω -语言.

上面两个推论表明：在 X^ω 中 不存在极大和极小 I -析取 ω -语言.

定理 5　令 $w \in X^+$. 若 $L \subseteq X^\omega$ 是 I -析取 ω -语言，则 $L \cap X^*(wX^+)^{(\omega)}$ 也是 I -析取 ω -语言.

证　令 $L_1 = X^*(wX^+)^{(\omega)}$，$\bar{L}_1 = X^\omega \backslash X^*(wX^+)^{(\omega)}$. 则 $\bar{L}_1$ 不是 I -稠密，由文献[2]的定理 9 知，$\bar{L}_1$ 不包含 I -析取 ω -语言，从而 $L \cap \bar{L}_1$ 也不包含 I -析取 ω -语言，又 $L = (L \cap L_1) \cup (L \cap \bar{L}_1)$，$(L \cap L_1) \cap (L \cap \bar{L}_1) = \emptyset$，于是由定理 4 可得，$L \cap L_1$ 或 $L \cap \bar{L}_1$ 是 I -析取 ω -语言. 但 $L \cap \bar{L}_1$ 不可能是 I -析取 ω -语言，故 $L \cap L_1$ 是 I -析取 ω -语言，即 $L \cap X^*(wX^+)^{(\omega)}$ 是 I -析取 ω -语言.

推论 3　令 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 是 X^* 中有限个字，$L \subseteq X^\omega$ 是 I -析取 ω -语言. 则 $L \cap \{\bigcap_{i=1}^{n} X^*(w_i X^+)^{(\omega)}\}$ 是一个 I -析取 ω -语言.

定理 6　令 $L \subseteq X^\omega$. 则 L 或 $\bar{L} = X^\omega \backslash L$ 包含 I -析取 ω -语言.

证　假设 L 和 $\bar{L}$ 都不包含 I -析取 ω -语言. 由文献[2]的定理 9，L 和 $\bar{L}$ 都不是 I -稠密，从而存在 w_1，$w_2 \in X^+$，对任意 $x, y \in X^*$，$x(w_1 y)^\omega \notin L$，$x(w_2 y)^\omega \notin \bar{L}$. 于是对任意 $x, y \in X^*$，$x(w_1 w_2 y)^\omega \notin L$，$x(w_1 w_2 y)^\omega = x w_1 (w_2 y w_1)^\omega \notin \bar{L}$. 因此对任意的 $x, y \in X^*$，$x(w_1 w_2 y)^\omega \notin X^\omega$，矛盾. 命题得证.

推论 4　令 $L \subseteq X^\omega$，则存在 $L_1 \subseteq X^\omega$，使得 $L_1 \cup L$ 或 $L_1 \cup \bar{L}$ 是一个 I -析取 ω -语言.

证　由定理 6 知，L 或 $\bar{L} = X^\omega \backslash L$ 包含 I -析取 ω -语言. 不妨设 L 包含 I -析取 ω -语言 L_2，从而 $\bar{L}_2$ 也是 I -析取 ω -语言. 因为 $\bar{L}_2 = \bar{L} \cup (L \backslash L_2)$，所以令 $L_1 = L \backslash L_2$ 即可.

定理 7　令 L 是 I -析取 ω -语言，a 和 b 是字母表 X 中的两个不同的字母. 则 $L' = aL \cup bX^\omega$ 是 I -析取 ω -语言.

证　假设 L' 不是 I -析取 ω -语言. 则存在 $u, v \in X^*$，$u \neq v$，$u \equiv v\ (I_{L'})$. 由同余的性质得，对任意 $x \in X^+$，$xu \equiv xv\ (I_{L'})$. 又单点集是前缀码，从而由文献[2]的性质 13 知，aL 是 I -析取 ω -语言，于是存在 $y_1, y_2 \in X^*$，使得 $y_1(xuy_2)^\omega \in aL$，$y_1(xvy_2)^\omega \notin aL$，或者 $y_1(xvy_2)^\omega \in aL$，$y_1(xuy_2)^\omega \notin aL$. 不妨设 $y_1(xuy_2)^\omega \in aL$，$y_1(xvy_2)^\omega \notin aL$，则 $y_1(xuy_2)^\omega \in L'$. 又 xu 与 xv 关于 $I_{L'}$ 同余，从而 $y_1(xvy_2)^\omega \in L'$. 由 $y_1(xvy_2)^\omega \notin aL$ 有 $y_1(xvy_2)^\omega \in bX^\omega$，即字 $y_1 x$ 以字母 b 开头，与 $y_1(xuy_2)^\omega \in aL$ 矛盾. 假设不成立，故 L' 是 I -析取 ω -语言.

参考文献：

[1]　Maler O, Staiger L. On Syntactic Congruences for ω-languages [J]. Theoret Comput Sci, 1997, 183: 93－112.

[2]　Yeh Y T, Yu S S. The Disjunctivities of ω-languages [J]. Discrete Appl Math, 2003, 127: 627－641.

[3]　Lyndon R C, Schützenberger M P. The Equation $a^M = b^N c^P$ in a free group [J]. Michigan Math J, 1962, 9: 289－298.

Some Properties of I-disjunctive ω-languages

LIU Zu-hua[1]，　CAO Chun-hua[2]

1. Department of Mathematics, Kunming University, Kunming 650031, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650031, China

Abstract: The authors prove that there are no maximal I-disjunctive ω-languages and no minimal I-disjunctive ω-languages. This paper gives the definition of I-disjunctive domain and shows that it is dense.

Key words: I-disjunctive ω-languages; I-disjunctive domain; I-dense

责任编辑　覃吉康