第 33 卷　第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 10 月
Vol. 33　No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2008

文章编号：1000-5471(2008)05-0011-04

正规 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群[①]

程莉芳，　孔祥智

江南大学 理学院，江苏 无锡 214122

摘要： 将通常的 Green 关系，$*$-Green 关系推广为 $\#$-Green 关系，并研究了 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群的半格分解．同时利用该半格分解证明了：$\mathscr{H}^{\#}$-富足半群是正规 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群当且仅当它是完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群的强半格．

关　键　词： $\#$-Green 关系；态射；自然序；半格分解

中图分类号： O152.7　　　　**文献标识码：** A

Green 关系在正则半群的研究中起着非常重要的作用[1-6]．文献[1]证明了半群是群并(即完全正则半群)当且仅当它是完全单半群的半格；利用该半格分解，文献[3]证明了完全正则半群的 Green 关系 $\mathscr{H}$ 是正规带同余当且仅当它是完全单半群的强半格．文献[7]推广了 Clifford 定理，证明了富足半群是超富足半群(即每个 $\mathscr{H}^*$-类均含幂等元的富足半群)当且仅当它是完全 $\mathscr{J}^*$-单半群的半格．

本文我们定义 $\#$-Green 关系并研究它的性质．同时，我们也讨论 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群的半格分解，该半格分解推广了文献[1]和文献[7]的结果．利用该半格分解，我们证明了 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群的 $\#$-Green 关系 $\mathscr{H}^{\#}$ 是正规带同余当且仅当它是完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群的强半格．从而推广了文献[3]的结果．

首先我们给出 $\#$-Green 关系的定义．

定义 1　设 S 为半群，定义

$$\mathscr{L}^{\#}=\{(a,b)\in S\times S:\text{对 } \forall e,f\in E(S^1),\ ae=af \text{ 当且仅当 } be=bf\}$$
$$\mathscr{R}^{\#}=\{(a,b)\in S\times S:\text{对 } \forall e,f\in E(S^1),\ ea=fa \text{ 当且仅当 } eb=fb\}$$
$$\mathscr{H}^{\#}=\mathscr{L}^{\#}\cap\mathscr{R}^{\#}$$
$$\mathscr{D}^{\#}=\mathscr{L}^{\#}\vee\mathscr{R}^{\#}$$

易见 $\mathscr{L}^{\#}$ 和 $\mathscr{R}^{\#}$ 是等价关系，但 $\mathscr{L}^{\#}$ 不是右同余，这与 Green 关系 $\mathscr{L}$，$*$-Green 关系 $\mathscr{L}^*$ 不同．关于 $\mathscr{R}^{\#}$ 有对称的结论．

记含半群 S 元素 a 的 $\mathscr{L}^{\#}$-类为 $L_a^{\#}$ 或 $L_a^{\#}(S)$．易知 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}^*\subseteq\mathscr{L}^{\#}$ 且每个 $\mathscr{H}^{\#}$-类至多含一个幂等元．若对 $a\in S$，$e\in H_a^{\#}\cap E(S)$，我们对任意的 $x\in H_a^{\#}$，记 e 为 x^0，显然，$x=xx^0=x^0x$．

若半群 S 为正则半群，则它的每个 $\mathscr{L}$-类至少含有一个幂等元，当然每个 $\mathscr{R}$-类也是如此．若 S 为完全正则半群，则每个 $\mathscr{H}$-类含幂等元．而富足半群的每个 $\mathscr{L}^*$-类及 $\mathscr{R}^*$-类都含幂等元．易知对半群的正则元有 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}$．因此正则半群全是富足半群．而超富足半群 S 的每个 $\mathscr{H}^*$-类含幂等元，这类半群是完全正则半群在富足半群中的推广．而关于 $\sim$-Green 关系，目前仅是一个概念，没有相应的半群类的研究结果．半群 S 称为 $\mathscr{H}^{\#}$-富足的，若它的每个 $\mathscr{H}^{\#}$-类含幂等元．$\mathscr{H}^{\#}$-富足半群是超富足半群的推广．易知在 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群中，对正则元有 $\mathscr{L}^{\#}=\mathscr{L}$．

我们已定义 $\#$-Green 关系中的 $\mathscr{L}^{\#}$，$\mathscr{R}^{\#}$ 及 $\mathscr{H}^{\#}$，$\mathscr{D}^{\#}$．为定义 $\mathscr{J}^{\#}$，我们首先定义半群 S 的左(右)$\#$-理想，称 S 的左(右)理想 I 为左(右)$\#$-理想，若对任意的 $a\in I$，$L_a^{\#}\subseteq I$($R_a^{\#}\subseteq I$)．半群 S 的子集 I 称为

① 收稿日期：2007-12-03
作者简介：程莉芳(1982-)，女，山西临汾人，硕士研究生，主要从事半群理论的研究．

$\#$-理想，若它既是左$\#$-理想，又是右$\#$-理想．因S自身是$\#$-理想，我们记含元素a的最小$\#$-理想为$J^{\#}(a)$并定义$\mathcal{J}^{\#}=\{(a,b)\in S\times S: J^{\#}(a)=J^{\#}(b)\}$．若$S$为正则半群，则$S$的每个左(右，双边)理想是左(右，双边)$\#$-理想．显然对幂等元$e$，左(右)理想$Se(eS)$是左(右)$\#$-理想，因对$a\in Se$，$a=ae$，故对任意的$b\in L_a^{\#}$，我们有$b=be\in Se$．

若$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群S是$\mathcal{J}^{\#}$-单的且$\mathcal{H}^{\#}$是同余，我们称S是完全$\mathcal{J}^{\#}$-单半群．若$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群S的$\mathcal{H}^{\#}$是同余且$S/\mathcal{H}^{\#}$是正规带，我们称S为正规$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群．所谓正规带是指一带满足等式$axya=ayxa$．

引理1 设S为$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群．则$\mathcal{H}^{\#}$是同余当且仅当对任意的$a,b\in S$，$(ab)^0=(a^0b^0)^0$．

证 必要性．令$a,b\in S$，则$a\mathcal{H}^{\#}a^0$，$b\mathcal{H}^{\#}b^0$．因$\mathcal{H}^{\#}$是同余，我们有$ab\mathcal{H}^{\#}a^0b^0$．由$ab\mathcal{H}^{\#}(ab)^0$及每个$\mathcal{H}^{\#}$-类仅含一个幂等元，有$(ab)^0=(a^0b^0)^0$．

充分性．因$\mathcal{H}^{\#}$是等价关系，我们只需证明$\mathcal{H}^{\#}$是相容的．令$(a,b)\in\mathcal{H}^{\#}$，$c\in S$．那么$(ca)^0=(c^0a^0)^0=(c^0b^0)^0=(cb)^0$，因此$\mathcal{H}^{\#}$左相容．对偶地，$\mathcal{H}^{\#}$右相容，从而$\mathcal{H}^{\#}$是同余．

引理2 若$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群S的幂等元e,f满足$e\mathcal{D}^{\#}f$，则$e\mathcal{D}f$．

证 因$e\mathcal{D}^{\#}f$，故存在S的元素$a_1,\cdots,a_k$满足$e\mathcal{L}^{\#}a_1\mathcal{R}^{\#}a_2\cdots a_k\mathcal{L}^{\#}f$．由$S$是$\mathcal{H}^{\#}$-富足的，我们有$e\mathcal{L}^{\#}a_1{}^0\mathcal{R}^{\#}a_2{}^0\cdots a_k{}^0\mathcal{L}^{\#}f$．故$e\mathcal{D}f$．

推论1 设S是$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群，则

$$\mathcal{D}^{\#}=\mathcal{L}^{\#}\circ\mathcal{R}^{\#}=\mathcal{R}^{\#}\circ\mathcal{L}^{\#}$$

证 令$a,b\in S$，$a\mathcal{D}^{\#}b$，由引理2，$a^0\mathcal{D}b^0$．故存在元素$c,d\in S$，$a^0\mathcal{L}c\mathcal{R}b^0$，$a^0\mathcal{R}d\mathcal{L}b^0$．那么$a\mathcal{L}^{\#}c\mathcal{R}^{\#}b$，$a\mathcal{R}^{\#}d\mathcal{L}^{\#}b$，从而结论成立．

引理3 设e,f为$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群S的幂等元．若$e\mathcal{J}f$，则$e\mathcal{D}f$．

证 因$SeS=SfS$，故存在$x,y,s,t\in S$，使得$f=set$，$e=xfy$．令$h=(fy)^0$，$k=(se)^0$．那么$hfy=fy=ffy$，从而$h=h^2=fh$，$sek=se=see$，这样$k=k^2=ke$．故hf,ek是幂等元且$hf\mathcal{R}h$，$ek\mathcal{L}k$．因此$ehf\mathcal{R}eh$，$ekf\mathcal{L}kf$．由$eh=xfyh=xfy=e$，$kf=kset=set=f$有$e\mathcal{R}ef\mathcal{L}f$，即$e\mathcal{D}f$．

命题1 设$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群S的$\mathcal{H}^{\#}$关系是同余，那么对$a\in S$，$J^{\#}(a)=Sa^0S$．

证 由$a^0\in J^{\#}(a)$有$Sa^0S\subseteq J^{\#}(a)$．我们下面证明理想Sa^0S是$\#$-理想，再由$a=aa^0\in Sa^0S$知命题成立．令$b=xa^0y\in Sa^0S$ $(x,y\in S)$，$k=(a^0y)^0$，则$a^0a^0y=ka^0y$，故$a^0(a^0y)^0=k^2=k$．再由$\mathcal{H}^{\#}$是同余，$xa^0y\mathcal{H}^{\#}xk$．令$h=(xk)^0=(xa^0y)^0$，那么$xkh=xkk$，因此$h=h^2=hk=ha^0k\in Sa^0S$．故若$c\in L_b^{\#}$，$d\in R_b^{\#}$，那么$c=ch$，$d=hd\in Sa^0S$，这样Sa^0S是$\#$-理想．

命题2 设S为完全$\mathcal{J}^{\#}$-单半群，则$\mathcal{J}^{\#}=\mathcal{D}^{\#}$．

证 令$a,b\in S$，$a\mathcal{J}^{\#}b$．由命题1，$Sa^0S=Sb^0S$．由引理3，$a^0\mathcal{D}b^0$，因此$a\mathcal{H}^{\#}a^0\mathcal{D}b^0\mathcal{H}^{\#}b$，从而$a\mathcal{D}^{\#}b$，故$\mathcal{J}^{\#}\subseteq\mathcal{D}^{\#}$．反之，令$a,b\in S$，$a\mathcal{D}^{\#}b$．由推论1，存在$c\in S$，使得$a\mathcal{L}^{\#}c\mathcal{R}^{\#}b$．这样$a^0\mathcal{L}c^0\mathcal{R}b^0$，故$Sa^0S=Sc^0S=Sb^0S$．由命题1，$(a,b)\in\mathcal{J}^{\#}$，因此$\mathcal{D}^{\#}\subseteq\mathcal{J}^{\#}$．从而$\mathcal{J}^{\#}=\mathcal{D}^{\#}$．

命题3 设S为完全$\mathcal{J}^{\#}$-单半群，则S的幂等元是本原的．

证 设e,f为S的幂等元且$e\leqslant f$．由S是完全$\mathcal{J}^{\#}$-单的，据命题1，$f\in SeS$．由文献[1]的§8.4的习题3，存在幂等元g使得$f\mathcal{D}g$，$g\leqslant e$．令$a\in S$，$f\mathcal{L}a\mathcal{R}g$，则$f\mathcal{L}a^0\mathcal{R}g$．因$g\leqslant f$，我们有

$$a^0=ga^0(gf)a^0=g(fa^0)=gf=g$$

这样$g\leqslant f$，$g\mathcal{L}f$，因此$f=fg=g$．但$g\leqslant e$，故$e=f$．即S的所有幂等元是本原的．

引理4 设S为完全$\mathcal{J}^{\#}$-单半群，则S的正则元集是一子半群．

证 令a,b是S的正则元．因S仅有一个$\mathcal{D}^{\#}$-类(据命题2)，由推论1，存在元素$c\in S$，使得$a\mathcal{L}^{\#}c\mathcal{R}^{\#}b$．这样我们有$a\mathcal{L}^{\#}c^0\mathcal{R}^{\#}b$．故由$a$为正则元，$c^0b=b$，$a\mathcal{L}c^0$．从而$ab\mathcal{L}b$，再由$b$的正则性知，$ab$是正则元．

定理1 若$\mathcal{H}^{\#}$-富足半群S的$\#$-Green关系$\mathcal{H}^{\#}$是同余，则S是完全$\mathcal{J}^{\#}$-单半群$S_\alpha(\alpha\in Y)$的半格Y且对$\alpha\in Y$，$a\in S_\alpha$，$L_a^{\#}(S)=L_a^{\#}(S_\alpha)$，$R_a^{\#}(S)=L_a^{\#}(S_\alpha)$．

证 令$a\in S$，则$a\mathcal{H}^{\#}a^2$．由命题1，$J^{\#}(a)=J^{\#}(a^2)$．对$a,b\in S$，$(ab)^2\in SbaS$，我们有

$$J^{\#}(ab)=J^{\#}((ab)^2)\subseteq J^{\#}(ba)$$

由对称性，$J^{\#}(ab)=J^{\#}(ba)$. 由命题 1，$J^{\#}(a)=Sa^0S$，$J^{\#}(b)=Sb^0S$，故若 $c\in J^{\#}(a)\cap J^{\#}(b)$，我们知存在 $x,y,z,t\in S$，使得 $c=xa^0y=zb^0t$. 这样 $c^2=zb^0txa^0y\in Sb^0txa^0S\subseteq J^{\#}(b^0txa^0)$，$J^{\#}(b^0txa^0)=J^{\#}(a^0b^0tx)$. 因此 $c^2\in J^{\#}(a^0b^0)$. 又 $c\mathscr{H}^{\#}c^2$，也有 $c\in J^{\#}(a^0b^0)$. 因 $a\mathscr{H}^{\#}a^0$，$b\mathscr{H}^{\#}b^0$ 及 $\mathscr{H}^{\#}$ 是同余，$ab\mathscr{H}^{\#}a^0b^0$. 故 $c\in J^{\#}(ab)$. 这样 $J^{\#}(a)\cap J^{\#}(b)\subseteq J^{\#}(ab)$，反包含是显然的，故

$$J^{\#}(a)\cap J^{\#}(b)=J^{\#}(ab)$$

这样所有的 $\#$-理想 $J^{\#}(a)(a\in S)$ 在交关系下是半格 Y 且映射 $a\longrightarrow J^{\#}(a)$ 是 S 到 Y 的满同态. $J^{\#}(a)$ 的逆象恰好是 $\mathscr{J}^{\#}$-类 $J_a^{\#}$，从而也是半群 S 的子半群. 故 S 为半群 $J_a^{\#}$ 的半格 Y.

令 a,b 为同一 $\mathscr{J}^{\#}$-类 $J^{\#}$ 的元素，并设 $(a,b)\in\mathscr{L}^{\#}(J^{\#})$. 显然 $a^0,b^0\in J^{\#}$，因此 $(a^0,b^0)\in\mathscr{L}^{\#}(J^{\#})$，即 $a^0b^0=a^0$，$b^0a^0=b^0$，且 $(a^0,b^0)\in\mathscr{L}^{\#}(S)$. 从而 $(a,b)\in\mathscr{L}^{\#}(S)$，又 $L_a^{\#}(S)\subseteq J^{\#}$，故 $L_a^{\#}(S)=L_a^{\#}(J^{\#})$. 类似地，$R_a^{\#}(S)=R_a^{\#}(J^{\#})$.

从以上讨论我们有 $H_a^{\#}(J^{\#})=H_a^{\#}(S)$，故 $J^{\#}$ 是 $\mathscr{H}^{\#}$-富足的. 进而，若 $a,b\in J^{\#}$，那么由命题 2，$(a,b)\in\mathscr{D}^{\#}(S)$，因此由推论 1，存在元素属于 $L_a^{\#}(S)\cap R_b^{\#}(S)=L_a^{\#}(J^{\#})\cap R_b^{\#}(J^{\#})$. 即 a,b 在 $J^{\#}$ 中是 $\mathscr{D}^{\#}$-相关的，故 $J^{\#}$ 是 $\mathscr{J}^{\#}$-单的.

引理 5　令 $S=(Y;S_\alpha)$ 是 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群且 $\mathscr{H}^{\#}$ 是同余，那么

(i) 设 $a\in S_\alpha$，$\alpha\geqslant\beta$. 则存在 $b\in S_\beta$，使得 $a\geqslant b$；

(ii) 设 $a,b,c\in S$，$b\mathscr{H}^{\#}c$，$a\geqslant b,c$，则 $b=c$；

(iii) 设 $a\in E(S)$，$b\in S$，满足 $a\geqslant b$，则 $b\in E(S)$.

证　(i) 令 $b\in S_\beta$，由引理 1，$a(aba)^0$，$(aba)^0a$ 和 $(aba)^0$ 属于同一 $\mathscr{H}^{\#}$-类，因此

$$a(aba)^0=(aba)^0a(aba)^0=(aba)^0a$$

令 $b=a(aba)^0$，那么 $b\in S_\beta$ 且 $a\geqslant b$.

(ii) 由自然序"$\geqslant$"的定义，存在 $e,f,g,h\in E(S)$，使得 $b=ea=af$，$c=ga=ah$. 由 $eb=b$ 和 $b\mathscr{H}^{\#}b^0$，我们有 $eb^0=b^0$. 类似地，$c^0h=c^0$. 故 $ec=ec^0c=eb^0c=b^0c=c$. 同样，$bh=b$，因此 $b=bh=eah=ec=c$.

(iii) 存在 $e,f\in E(S)$，使得 $b=ea=af$，因此 $b^2=(ea)(af)=ea^2f=b$.

由命题 3，我们易证下面的引理

引理 6　设 ϕ 是从完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群 S 到完全 $\mathscr{J}^{\#}$-半群 T 的同态映射. 则对 $a\in S$，$(a\phi)^0=a^0\phi$.

注　若 ϕ 是两个完全 $\mathscr{J}^{\#}$-半群间的同态. 则 $\#$-Green 关系 $\mathscr{L}^{\#}$，$\mathscr{R}^{\#}$ 被保持，从而 $\mathscr{D}^{\#}$ 被保持. 而且，由命题 3 及引理 5，我们可证完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群是本原的.

引理 7　设 $S=(Y;S_\alpha)$ 为正规 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群，那么

(i) 对 $\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\geqslant\beta$，$a\in S_\alpha$，存在唯一的元素 $a_\beta\in S_\beta$，使得 $a\geqslant a_\beta$.

(ii) 对 $\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\geqslant\beta$，$a\in S_\alpha$，$x\in S_\beta$，若存在幂等元 $e\in S_\beta$，使得 $a^0\geqslant e$，则 $eax=ax$，$xae=xa$，$ea=ae$ 且 $(ea)^0=e$.

证　(i) 由引理 5 的 (i)，对任意的 $c\in S_\beta$，$a_\beta=a(aca)^0=(aca)^0a\in S_\beta$，满足 $a\geqslant a_\beta$. 若还有 $b\in S_\beta$ 满足 $a\geqslant b$，则存在幂等元 $g,h\in E(S)$，使得 $b=ga=ah$. 因此

$$a_\beta\mathscr{H}^{\#}=(aca)^0\mathscr{H}^{\#}a\mathscr{H}^{\#}=a\mathscr{H}^{\#}(aca)^0\mathscr{H}^{\#}\qquad b\mathscr{H}^{\#}=g\mathscr{H}^{\#}a\mathscr{H}^{\#}=a\mathscr{H}^{\#}h\mathscr{H}^{\#}$$

即 $a_\beta\mathscr{H}^{\#}\leqslant a\mathscr{H}^{\#}$，$b\mathscr{H}^{\#}\leqslant a\mathscr{H}^{\#}$. 易知 $S/\mathscr{H}^{\#}=(Y;S_\alpha/\mathscr{H}^{\#})$，据 $S/\mathscr{H}^{\#}$ 是正规带，$a_\beta\mathscr{H}^{\#}=b\mathscr{H}^{\#}$. 由引理 5 的 (ii)，$a_\beta=b$.

(ii) 因 $(a^0(ax)^0a^0)a^0=a^0(ax)^0a^0=a^0(a^0(ax)^0a^0)$，$a^0(ax)^0a^0\mathscr{H}^{\#}(a^0(ax)^0a^0)^0$，我们有

$$(a^0(ax)^0a^0)^0a^0=(a^0(ax)^0a^0)^0=a^0(a^0(ax)^0a^0)^0$$

即 $a^0\geqslant(a^0(ax)^0a^0)^0$. 而且，因 $a\in S_\alpha$，$x\in S_\beta$，我们有 $ax\in S_\beta$，从而由 (i)，$e=(a^0(ax)^0a^0)^0$. 这样我们有

$$eax=(a^0(ax)^0a^0)^0ax=(a^0(ax)^0a^0)^0a^0(ax)^0a^0ax=ax$$

类似地，$xae=xa$. 因 x 为 S_β 中任意元素，我们特取 $x=e$. 这样我们得到 $ea=ae$，再由引理 1，$(ea)^0=(ea^0)^0=e$.

定理 2 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群 S 是正规 $\mathscr{H}^{\#}$-富足半群当且仅当它是完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群的强半格.

证 必要性 据定理1,我们可令 $S=(Y;S_\alpha)$,这里 Y 是半格,每个 $S_\alpha(\alpha\in Y)$ 是完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群. 对 $\alpha,\beta\in Y$,$\alpha\geqslant\beta$,$a\in S_\alpha$,由引理7,我们可定义从 S_α 到 S_β 的映射 $\phi_{\alpha,\beta}:a\longrightarrow a_\beta$,这里 a_β 是 S_β 中唯一的满足 $a_\beta\leqslant a$ 的元素,且 $a_\beta=(aca)^0a=a(aca)^0$,$c\in S_\beta$. 下面我们证明 $S=[Y;S_\alpha,\phi_{\alpha,\beta}]$ 是完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群 S_α 的强半格. 为证 $\phi_{\alpha,\beta}$ 是同态,我们令 $b\in S_\alpha$,那么 $b\phi_{\alpha,\beta}=(bcb)^0b=b(bcb)^0$. 这样,由引理7有

$$a_\beta b_\beta=(aca)^0ab(bcb)^0=(aca)^0ab=ab(bcb)^0$$

从而 $a_\beta b_\beta\leqslant ab$,由注知 $a_\beta b_\beta=(a\phi_{\alpha,\beta})(b\phi_{\alpha,\beta})=(ab)\phi_{\alpha,\beta}$,故 $\phi_{\alpha,\beta}$ 是同态.

(i) 对 $\alpha\in Y$,我们易知 $\phi_{\alpha,\alpha}=1_{S_\alpha}$ 是 S_α 上的单位自同态.

(ii) 对 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$,$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$,由"$\leqslant$"的传递性,我们有 $\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma}=\phi_{\alpha,\gamma}$.

(iii) 对 $\alpha,\beta\in Y$,$a\in S_\alpha$,$b\in S_\beta$. 由引理5(i)的证明,我们可令

$$a\phi_{\alpha,\alpha\beta}=a_1=a(aca)^0=(aca)^0a \qquad b\phi_{\beta,\alpha\beta}=b_1=b(bcb)^0=(bcb)^0b$$

这里 $c\in S_{\alpha\beta}$ 为任意元素. 由引理7(ii),$a_1b_1=(aca)^0ab(bcb)^0=(aca)^0ab=ab(bcb)^0$,因此 $a_1b_1\leqslant ab$. 这样,据 $S_{\alpha\beta}$ 是本原的,我们有 $ab=a_1b_1=(a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta})$.

充分性 设 $S=[Y;S_\alpha,\phi_{\alpha,\beta}]$ 是完全 $\mathscr{J}^{\#}$-单半群 S_α 的强半格,我们只需证明 $\mathscr{H}^{\#}$ 是同余且 $S/\mathscr{H}^{\#}$ 是正规带. 对 $a\in S_\alpha$,$b\in S_\beta$,我们有 $ab=(a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta})$,因此 $(ab)^0=[(a^0\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b^0\phi_{\beta,\alpha\beta})]^0=(a^0b^0)^0$. 由引理1,$\mathscr{H}^{\#}$ 是同余.

对 $a\in S_\alpha$,$x\in S_\beta$,$y\in S_\gamma$,令 $\delta=\alpha\beta\gamma$. 通过计算,我们有 $(axya)\mathscr{H}^{\#}=a\phi_{\alpha,\delta}\mathscr{H}^{\#}=(ayxa)\mathscr{H}^{\#}$. 故 $S/\mathscr{H}^{\#}$ 是正规带.

参考文献:

[1] Clifford A H, Preston G B. The Algebraic Theorey of Semigroups [M]. Providence: American Mathematical Society, 1967.

[2] Howie J M. Fundamental of Semigroup Theory [M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[3] Petrich M, Reilly N R. Completely Regular Semigroups [M]. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[4] Clifford A H. Semigroups Admitting Relative Inverses [J]. Ann of Math, 1941, 42: 1037-1049.

[5] Petrich M. The Structure of Completely Regular Semigroups [J]. Trans Amer Math Soc, 1974, 189: 211-236.

[6] Petrich M. Lectures in Semigroups [M]. London: Wiley & Sons Inc, 1976.

[7] Fountain J B. Abundant Semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 43(3): 103-129.

[8] Pastijn F. A Representation of a Semigroup By a Semigroup of Matrices Over a Group With Zero [J]. Semigroup Forum, 1975, 10: 238-249.

[9] El-Qallali A. Structure Theory for Abundant and Related Semigroups [D]. England: York University, 1980.

Normal $\mathscr{H}^{\#}$-Abundant Semigroups

CHENG Li-fang, KONG Xiang-zhi

School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China

Abstract: The usual Green relations, $*$-Green relations are generalized to $\#$-Green relations and the semilattice decomposition of $\mathscr{H}^{\#}$-abundant semigroups is given. By using this decomposition, the authors show that an $\mathscr{H}^{\#}$-abundant semigroup is a normal $\mathscr{H}^{\#}$-abundant semigroup if and only if it is strong semilattice of completely $\mathscr{J}^{\#}$-simple semigroups.

Key words: $\#$-Green relation; homomorphism; natural order; semilattice decomposition

责任编辑 覃吉康