文章编号：1000－5471(2008)05－0007－04

# 仅含两个非次正规子群共轭类的有限群①

冯爱芳[1]，　段泽勇[2]

1. 昆明学院 数学系，昆明 650031；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要**：主要证明了：若有限群 $G$ 只含两个非次正规子群共轭类 $H=\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 和 $K=\{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$，则 $G$ 可解. 其中 $|G|$ 含两个或三个素因子，且 $G$ 满足下列情形之一：

(1) $G=H\ltimes Q$，其中 $H$ 是具有循环极大子群的 $p$-群，$Q$ 是 Sylow $q$-子群，$p$,$q$ 为互不相同的素数；

(2) $G=K\ltimes Q$，其中 $K$ 是 $G$ 的循环 Sylow $p$-子群，$Q$ 是 $G$ 的 Sylow $q$-子群；

(3) $G=A\ltimes B$，其中 $A$ 是 $p^m q^n$ 阶非幂零有限内-Abel 群，$B$ 是 Sylow $r$-子群，$p$,$q$,$r$ 为互不相同的素数.

**关　键　词**：有限群；非次正规子群；共轭类；极大子群

**中图分类号**：O152.1　　**文献标识码**：A

子群是群论的重要研究对象，很多工作都是通过对某些特定子群的研究来讨论群的结构和性质. 比如正规子群、次正规子群、极大子群等等. 所有子群都正规的群(Dedekind 群)的结构被文献[1]完全刻画了出来，自此，文献[2]又对只含一个非正规子群共轭类的有限群的结构进行了完全分类. 与此同时，也有很多群论工作者通过把这些条件限制在非次正规子群上来研究群的结构和性质，得到了所有子群都次正规的有限群是幂零群这一比较好的性质. 文献[3]证明了有限群只含一个非次正规子群共轭类当且仅当它是非幂零的有限内-Abel 群，从而完全确定出了这种群的结构，并且从一个新的角度对非幂零的有限内-Abel 群进行了刻画. 本文对于只含两个非次正规子群共轭类的有限群，得到了下面的主要性质：

**定理 1**　若有限群 $G$ 只含两个非次正规子群共轭类 $H=\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 和 $K=\{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$，则 $G$ 可解，其中 $|G|$ 含两个或三个素因子，且 $G$ 满足下列情形之一：

(1) $G=H\ltimes Q$，其中 $H$ 是具有循环极大子群的 $p$-群，$Q$ 是 Sylow $q$-子群，$p$,$q$ 为互不相同的素数；

(2) $G=K\ltimes Q$，其中 $K$ 是 $G$ 的循环 Sylow $p$-子群，$Q$ 是 $G$ 的 Sylow $q$-子群；

(3) $G=A\ltimes B$，其中 $A$ 是 $p^m q^n$ 阶非幂零有限内-Abel 群，$B$ 是 Sylow $r$-子群，$p$,$q$,$r$ 为互不相同的素数.

**证**　首先，至少有一个非次正规子群共轭类中的群是 $G$ 的 Sylow 子群：若 $H$ 和 $K$ 中的群都不是 $G$ 的 Sylow 子群，则 $G$ 的所有 Sylow 子群次正规. 令 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 则有正规链 $P\lhd G_1\lhd G_2\lhd\cdots\lhd G_n=G$. 由于 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，因此 $P\in \mathrm{Syl}_p(G_1)$，又 $P\lhd G_1$，从而 $P \operatorname{char} G_1\lhd G_2$，于是 $P\lhd G_2$，依次类推 $P\lhd G$，即 $G$ 的所有 Sylow 子群都正规，从而 $G$ 幂零，$G$ 的所有子群次正规，矛盾. 故至少有一个非次正规子群共轭类中的群是 $G$ 的 Sylow 子群.

其次，有且只有一个非次正规子群共轭类中的群是 $G$ 的极大子群. 若 $H=\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 里的群都极大，则 $K=\{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$ 里的群必为循环 $p$-群. 特别地，若 $K_i\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$p$ 是 $|G|$ 的最小素

① 收稿日期：2007－12－25

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10471112).

作者简介：冯爱芳(1981－)，女，山东济宁人，硕士，主要从事无限群的研究.

因子，则 $G$ $p$-幂零，从而 $p$-正规.

当然，这两个非次正规子群共轭类必有一类中的群是极大子群. 否则群 $G$ 的所有极大子群正规，于是 $G$ 幂零，从而 $G$ 的所有子群次正规，矛盾. 若这两个非次正规子群共轭类中的群都是极大子群，则对于 $G$ 的任一真子群 $L$，都有 $L$ 的所有子群次正规，从而 $L$ 幂零，于是 $G$ 为有限内幂零群，从而 $G = P \ltimes Q$，其中 $P = \langle a \rangle$ 是 $G$ 的 Sylow $p$-子群，$Q$ 为 $G$ 的正规 Sylow $q$-子群. 从而由 $Q$ 的正规性知 $P$ 非次正规且极大，进而由文献[3]的定理1的证明知 $G$ 是非幂零的有限内 Abel 群，并且 $G$ 只含一个非次正规子群共轭类，矛盾. 因此，$G$ 有且只有一个非次正规子群共轭类中的群是极大子群. 不妨设 $H = \{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 里的群极大.

为了叙述方便，以下我们不加区别地用 $K$ 或 $K_i$ 表示 $K = \{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$ 里的群；用 $H$ 或 $H_i$ 表示 $H = \{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 里的群.

$K$ 必为循环 $p$-群. 若 $|K|$ 不止一个素因子，则 $K = K_{p_1} \times K_{p_2} \times \cdots \times K_{p_s}$，且 $K_{p_1}, K_{p_2}, \cdots, K_{p_s}$ 均次正规于 $G$，从而 $K \mathrm{sn} G$，矛盾. 因此 $K$ 是 $p$-群. 若 $K$ 有两个极大子群 $L_1, L_2$，则 $K = L_1 L_2$，且由 $K$ 幂零知 $L_i \lhd K$ $(i = 1, 2)$，又 $L_i \mathrm{sn} G$ $(i = 1, 2)$，从而 $K \mathrm{sn} G$，矛盾. 于是 $K$ 只有一个极大子群 $L$. 取 $a \in K - L$，则必有 $K = \langle a \rangle$，即 $K$ 是循环群，从而 $K$ 是循环 $p$-群.

设 $N = N_G(K)$，$C = C_G(K)$，则 $N/C \simeq \mathrm{Aut}K$. 又由 $K$ 为循环 $p$-群知，$K \leqslant C$，且 $|\mathrm{Aut}K| = \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$，其中 $|K| = p^\alpha$，从而 $|N/C| \,\Big|\, (p-1)$. 又依假设 $p$ 是 $|G|$ 中最小素因子，所以必有 $|N/C| = 1$，即 $N = C$. 从而 $G$ 为 $p$-幂零. 令 $M = O^p(G)$. 则因 $G$ 是 $p$-幂零群，$G/M \simeq K$，有 $Z(G/M) = Z(K)M/M$. 于是对任意的 $g \in G$，有

$$Z(K)M = (Z(K)M)^g = (Z(K))^g M$$

若 $(Z(K))^g \leqslant K$，则

$$\begin{aligned}(Z(K))^g &= (Z(K))^g M \cap K \\ &= Z(K)M \cap K = Z(K)(M \cap K) = Z(K)\end{aligned}$$

故 $G$ 为 $p$-正规的.

再次，$G$ 必有正规极大子群 $M$. 若 $G$ 只有极大子群 $H$，则 $m = |G : N_G(H)|$. 因为 $H$ 极大非正规，所以 $H = N_G(H)$，从而有

$$m = |G : N_G(H)| = |G : H|$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{m} H_i\right| &= 1 + \left|\bigcup_{i=1}^{m} (H_i - 1)\right| \\ &\leqslant 1 + m(|H| - 1) \\ &\leqslant 1 + |G : H|(|H| - 1) \\ &= |G| - |G : H| + 1\end{aligned}$$

因为 $H < G$，故 $|G : H| > 1$. 于是有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} H_i\right| < |G|$$

即 $\bigcup_{i=1}^{m} H_i$ 是 $G$ 的真子集. 而另一方面，对任意 $g \in G$，都有某个 $H_i$，使得 $g \in H_i$，从而

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} H_i\right| = |G|$$

矛盾. 所以 $G$ 除了 $H = \{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 里的群外必有极大子群 $M$，由假设条件 $M \lhd G$.

最后，$G$ 可解，$|G|$ 含两个或三个素因子：对 $M$ 的任意真子群 $M_1$，若 $M_1 \neq K_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则必有 $M_1 \mathrm{sn} G$，从而 $M_1 \mathrm{sn} M$. 因此，若 $K_i \not\leq M$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $M$ 的所有子群次正规，$M$ 幂零，当然可解. 又 $G/M$ 为素数阶循环群，$G/M$ 可解，于是 $G$ 可解. 若有某个 $K_i \leqslant M$，由 $M \lhd G$ 知 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 均包含在 $M$ 中，且在 $M$ 中非次正规. 若不然，$K_i \mathrm{sn} M \lhd G$，从而 $K_i \mathrm{sn} G$，矛盾. 且 $K_i$ 必为 $M$ 的 Sylow 子群. 否则，$M$

的 Sylow 子群都正规，$M$ 幂零，矛盾．从而 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 在 $M$ 中也彼此共轭，即 $M$ 只含一个非次正规子群共轭类，于是 $M$ 内幂零，$M$ 可解，从而 $G$ 可解．

由上面的证明知，若 $K_i \leqslant M\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $M$ 为有限内幂零群，从而 $|M|$ 只含两个素因子，于是 $|G|$ 至多有 3 个素因子．若 $K$ 不包含在任意正规极大子群 $M$ 中，则必有某个 $H_i$ 使得 $K \leqslant H_i$，不妨设 $K \leqslant H$．若 $H$ 是 $G$ 的 Sylow 子群，则由 $H$ 是可解群 $G$ 的极大子群知 $|G:H|$ 是素数阶方幂，且 $(|G:H|, |H|) = 1$，从而 $|G|$ 只有两个素因子．若 $H$ 不是 $G$ 的 Sylow 子群，则 $K$ 必是 $G$ 的 Sylow 子群，从而也是 $H$ 的 Sylow 子群，于是所有包含在 $H$ 中的 $K$ 的共轭者在 $H$ 中也彼此共轭．若 $K$ 是 $H$ 的非次正规子群，则 $H$ 是只含一个非次正规子群共轭类的有限内幂零群，$|H|$ 只含两个素因子，从而 $|G|$ 至多含 3 个素因子．

若 $K$ 是 $H$ 的次正规子群，则 $H$ 是幂零群，从而 $|H|$ 也必只有两个素因子．否则，若 $|H|$ 至少含素因子 $p_1, p_2, p_3$，则 $H = K \times P_1 \times P_2 \times L$，其中 $P_1 \in \mathrm{Syl}_{p1}(H)$，$P_2 \in \mathrm{Syl}_{p2}(H)$，$(|L|, p_1 p_2 p_3) = 1$，且 $K < K \times P_1 \times L < H$，$K < K \times P_2 \times L < H$，从而 $K \times P_1 \times L \mathrm{sn} G$，$K \times P_2 \times L \mathrm{sn} G$．于是 $H = (K \times P_1 \times L)(K \times P_2 \times L) \mathrm{sn} G$，矛盾．故 $|G|$ 至多有 3 个素因子．

设 $|G| = p^m q^n$，则 $mn > 1$．否则 $m = n = 1$，而 $pq$ 阶群的个数（指互不同构的）只有两种[4]：在 $q \nmid (p-1)$ 时，只能是循环群；而在 $q \mid (p-1)$ 时除循环群外还有一个，其结构是

$$G = \langle a, b \mid a^p = 1 = b^q, b^{-1}ab = a^r, \text{其中 } r^q \equiv 1 \pmod p, r \not\equiv 1 \pmod p \rangle$$

显然 $pq$ 阶群的所有子群次正规或只含一个非次正规子群共轭类．

(1) 若 $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$，则 $G$ 的 Sylow $q$-子群 $Q \lhd G$．从而 $G = H \ltimes Q$．由上面的证明知存在某个 $H_i$，使得 $K \leqslant H_i$，不妨设 $K \leqslant H$．若 $K < L < H$，则必有 $L \mathrm{sn} G$，$K \mathrm{sn} L$，从而 $K \mathrm{sn} G$，矛盾．所以 $K$ 是 $H$ 的循环极大子群．故 $H$ 是具有循环极大子群的 $p$-群，$Q$ 是 Sylow $q$-群，$p, q$ 为互不相同的素数；

(2) 若 $K \in \mathrm{Syl}_p(G)$，则 $G$ 的 Sylow $q$-子群 $Q \lhd G$，从而 $G = K \ltimes Q$，且 $K$ 是 $G$ 的循环 Sylow $p$-子群．

(3) 设 $|G| = p^m q^n r^t$，则 $K$ 必是 $G$ 的 Sylow 子群．若 $K \in \mathrm{Syl}_p(G)$，则 $G$ 的 Sylow $q$-子群和 Sylow $r$-子群均正规于 $G$．若 $A$ 是 $G$ 的极大子群，且 $K \leqslant A$，则 $K$ 也是 $A$ 的 Sylow 子群，从而 $A$ 只有一个非次正规子群共轭类，$A$ 是非幂零有限内-Abel 群．$A$ 的阶有两个素因子，不妨设 $|A| = p^m q^n$．则 $G = A \ltimes B$，其中 $A$ 是 $p^m q^n$ 阶非幂零内-Abel 群，$B$ 是 Sylow $r$-子群，$p, q, r$ 为互不相同的素数．

综上结论得证．

事实上，满足(1)，(2)，(3) 的有限群都是存在的．

**例 1**　$4p$ 阶群（$p$ 为奇素数）$G = \langle a, b, c \rangle$，$a^p = 1 = b^2$，$b^{-1}ab = a^{-1}$，$c^2 = b$，$cb = bc$，$c^{-1}ac = a^k$，$k^2 \equiv -1 \pmod p$，$p \equiv 1 \pmod 4$．

事实上，群 $G = A + Ac$，$p \equiv 1 \pmod 4$，而 $A = \langle a, b \rangle = \langle a \rangle + \langle a \rangle b$．显然 $G$ 的 Sylow $p$-子群正规，而 Sylow 2-子群不正规．我们又知 $\langle a \rangle$ 无 2 阶元，而 $\langle a \rangle b$ 中每个元的阶皆为 2，故 $A$ 中共有 $p$ 个 2 阶元．然而 $Ac$ 中的元或为 $a^r c$ 形或为 $a^r bc$ 形，而

$$(a^r c)^2 = a^r c a^r c = a^r c^2 a^{kr} = a^r b a^{kr} = a^r b^{-1} a^{kr} b^2 = a^r a^{-kr} b = a^{r(1-k)} b \neq 1$$

且

$$(a^r bc)^2 = a^r bca^r bc = a^r bc^2 c^{-1} a^r bc = a^r bba^{kr} b = a^{r(1+k)} b \neq 1$$

说明了陪集 $Ac$ 中无 2 阶元．故 $G$ 中 2 阶元为且仅为形 $a^r b$，共 $p$ 个．且 $A$ 为 $2p$ 阶二面体群，所有二阶元彼此共轭，且不正规，因此 $G$ 的所有 2 阶子群彼此共轭且非次正规，即 $G$ 共有两个非次正规子群共轭类：Sylow 2-子群形成的共轭类和所有二阶子群形成的共轭类．

**例 2**　$2p^2$ 阶群（$p$ 为奇素数）$G = \langle a, b \rangle$，$a^{p^2} = 1 = b^2$，$b^{-1}ab = a^{-1}$．

事实上，群 $G = A + Ab$，而 $A = \langle a \rangle$．所有 $p$ 阶和 $p^2$ 阶子群次正规，Sylow 2-子群不正规．我们又知道 $A$ 中无 2 阶元，而 $Ab$ 中每元的阶皆为 2，故 $G$ 中阶为 2 的元共有 $p^2$ 个，为且仅为 $a^r b$ 形．所以 $G$ 中 $2p$ 阶子群为且仅为 $\langle a^p, a^i b \rangle (i = 0, 1, \cdots, p-1)$，共 $p$ 个．考虑 $2p$ 阶子群 $\langle a^p, b \rangle$，有

$$b^a = a^{-1} ba = babba = ba^2 \notin \langle a^p, b \rangle$$

否则 $a^2 = b^{-1}ba^2 \in \langle a^p, b\rangle$，又$(2, p) = 1$，从而 $a \in \langle a^p, b\rangle$，则$\langle a^p, b\rangle = G$，矛盾．而

$$\langle a^p, b\rangle \leqslant N_G(\langle a^p, b\rangle) < G$$

于是$\langle a^p, b\rangle = N_G(\langle a^p, b\rangle)$，从而其共轭者个数为 $|G : N_G(\langle a^p, b\rangle)| = p$．说明 $G$ 的所有 $2p$ 阶子群彼此共轭．故 $G$ 只含两个非次正规子群共轭类：Sylow 2-子群形成的共轭类和所有 $2p$ 阶子群形成的共轭类．

**例 3** $2pq$ 阶群($p,q$ 是奇素数且 $q < p$) $G = \langle a, b, c\rangle$，$a^p = b^q = c^2 = 1$，$b^{-1}ab = a^r$，$c^{-1}ac = a$，$c^{-1}bc = b$，其中 $r^q \equiv 1$ 而 $r \neq 1 \pmod p$．

事实上，群 $G = A + Ac$，$A = \langle a, b\rangle$．显然 $pq$ 阶和 Sylow 2-子群正规．由于 $G$ 的 $p$ 阶元必在 $A$ 内，而 $A$ 的 $p$ 阶元又在$\langle a\rangle$ 内，所以 $G$ 的 $p$ 阶子群都正规．因为群 $G = A \times \langle c\rangle$，故其 2 阶元只有 $c$，所以 $G$ 只有一个 $2p$ 阶子群$\langle a, c\rangle$，当然正规于 $G$．由于 $b,c \in C_G(b)$，$a \notin C_G(b)$，由 Sylow 定理，$G$ 有 $p$ 个 Sylow $q$-子群彼此共轭且不正规．说明 $G$ 有 $p$ 个 $q$ 阶元，从而有 $p$ 个 $2q$ 阶子群．显然 $2q$ 阶子群$\langle b, c\rangle$ 极大非正规，于是$\langle b, c\rangle$ 的共轭者个数为 $|G : N_G(\langle b, c\rangle)| = |G : \langle b, c\rangle| = p$，即所有 $2q$ 阶子群彼此共轭且不正规．故 $G$ 只含两个非次正规子群共轭类：所有 Sylow $q$-子群形成的共轭类和所有 $2q$ 阶子群形成的共轭类．

由定理 1 得到：

**推论 1** 设有限群 $G$ 只含两个非次正规子群共轭类 $H = \{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 和 $K = \{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$．若 $|H| > |K|$，则对任意 $K_i$，存在 $g \in G$，使得 $K_i \leqslant H^g$，$i = 1,2,\cdots,n$．

**参考文献：**


[1] Robinson D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York: Spring-Verlag, 2003.

[2] Rolf Brandl. Groups With Few Non-Normal Subgroups [J]. Communications in Algebra, 1995, 23(6): 2091-2098.

[3] FENG Ai-fang, ZHAI Ting, DUAN Ze-yong. Finite Groups Whose Non-Subnormal Subgroups Are Conjugate [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(2): 5-7.

[4] 张远达. 有限群构造 [M]. 北京：科学出版社，1982.


# Groups Which Have Only One Non-subnormal Subgrouops Conjugate Class


FENG Ai-fang[1], DUAN Ze-yong[2]

1. Department of Mathematics, Kunming University, Kunming 650031, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China



**Abstract**: In this paper the authors mainly proved that: If the finite group $G$ has two conjugate classes of non-subnormal subgroups $H = \{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ and $K = \{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$, then G is soluble, and $|G|$ has at most three prime factors, and $G$ satisfing one of the following conditions:

(1) $G = H \ltimes Q$, where H is a p-group which has cyclic maximal subgroups, and $Q$ is the Sylow$q$-subgroup of $G$, p and q are different primes.

(2) $G = K \ltimes Q$, where K is a Sylow $p$-subgroup of $G$, $K$ is cyclic, and $Q$ is the Sylow $q$-subgroup of $G$.

(3) $G = A \ltimes B$, where A is a non-nilpotent finite inner-abel group with order $p^m q^n$, $B$ the a Sylow $r$-of $G$, and $p$, $q$, $r$ are different primes.



**Key words**: finite group; non-subnormal subgroup; class of conjugate; maximal subgroup

责任编辑 覃吉康