文章编号：1000－5471(2008)05－0001－03

p^n 阶群的一个新刻画①

苑金枝，　曹洪平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 是具有循环极大子群的 p^n 阶群，p 为素数. 对 G 的 7 个互不同构的类型，给出了 G 的各阶元之个数，进一步证明了除 3 个类型外，其余 4 个类型均可由其各阶元之个数进行刻画.

关　键　词：阶型；循环极大子群；同构

中图分类号：O152.1　　**文献标识码：A**

对任一有限群 G 和任一正整数 d，令 $G(d)=\{x\in G\mid x^d=1\}$. 若 G_1 与 G_2 为有限群，满足 $|G_1(d)|=|G_2(d)|$，$d=1,2,\cdots$，则称 G_1 与 G_2 为同阶型群. J. G. Thompson 提出了

问题 1　设 G_1 与 G_2 为同阶型的有限群，若 G_1 可解，则 G_2 一定可解.

对这一猜想的研究，目前没有什么好的办法，仅有一些群论专家从侧面进行了研究.

文献[1] 提出了

猜想　设 G 为群，H 为有限单群，则 $G\cong H$ 当且仅当

(1) $\pi_e(G)=\pi_e(H)$，其中 $\pi_e(G)$ 表示 G 中元的阶之集；

(2) $|G|=|H|$.

很明显，若 G_1,G_2 为同阶型有限群，则 $\pi_e(G_1)=\pi_e(G_2)$ 且 $|G_1|=|G_2|$，于是猜想 2 证明后即可得：设 G_1,G_2 为同阶型有限群，若 G_1 可解，则 G_2 非单. 但这离猜想 1 的证明仍有距离.

本文讨论与同阶型群相关的另一个问题，怎样的群可由其阶型唯一确定？我们利用具有循环极大子群的 p^n 阶群的分类，证明了有循环极大子群的 p^n 阶群在什么情况下可由其阶型唯一确定，这里 p 为素数.

设 G 为 p^n 阶的有限群，其中 p 为素数，n 是正整数. $s_k(G)$ 表示 G 中 p^k 阶子群的个数. Ω_k 表 G 中 k 阶元的个数，其中 k 为正整数，且 $k\,\big|\,|G|$，记 $\Omega(G)=(\Omega_1,\cdots,\Omega_i,\cdots,\Omega_s)$，称 $\Omega(G)$ 为 G 的阶型.

显然 G_1 与 G_2 为同阶型有限群当且仅当 $\Omega(G_1)=\Omega(G_2)$.

引理 1[2]　设 G 为 p^n 阶群，p 为素数，且 G 有循环极大子群，则 G 只有以下 7 个类型：

(Ⅰ) p^n 阶循环群：$G_1=\langle a\rangle$，$a^{p^n}=1$，$n\geqslant 1$.

(Ⅱ) (p^{n-1},p) 型交换群：$G_2=\langle a,b\rangle$，$a^{p^{n-1}}=b^p=1$，$[a,b]=1$，$n\geqslant 2$.

(Ⅲ) $p\neq 2$，$n\geqslant 3$，$G_3=\langle a,b\rangle$，有定义关系：$a^{p^{n-1}}=1$，$b^p=1$，$b^{-1}ab=a^{1+p^{n-2}}$.

(Ⅳ) 广义四元数群：$p=2$，$n\geqslant 3$，$G_4=\langle a,b\rangle$，有定义关系：$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=a^{2^{n-2}}$，$b^{-1}ab=a^{-1}$.

(Ⅴ) 二面体群：$p=2$，$n\geqslant 3$，$G_5=\langle a,b\rangle$，有定义关系：$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1}$.

(Ⅵ) $p=2$，$n\geqslant 4$，$G_6=\langle a,b\rangle$，有定义关系：$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{1+2^{n-2}}$.

---

① 收稿日期：2008－02－22

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771172).

作者简介：苑金枝(1982－)，女，河南周口人，硕士研究生，主要从事有限群论的研究.

通讯作者：曹洪平，副教授.

(Ⅶ) $p=2$，$n\geqslant 4$，$G_7=\langle a,b\rangle$，有定义关系：$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}}$.

引理 2 设 G 为有循环极大子群的 p -群，那么

(1) 若 G 是 (Ⅰ) 型群，则 $s_k(G)=1$，其中 $k=0,1,\cdots,n$.

(2) 若 G 是 (Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅵ) 型群，则 $s_k(G)=\begin{cases}1 & k=0,n\\ p+1 & k=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$

(3) 若 G 是 (Ⅳ),(Ⅴ),(Ⅶ) 型群，则 $s_k(G)=\begin{cases}1 & k=0,n\\ 2^{n-k}+1 & k=2,3,\cdots,n-1\end{cases}$

特别地，对(IV) 型群，$s_1(G)=1$；对(V) 型群，$s_1(G)=2^{n-1}+1$；对 (Ⅶ) 型群，$s_1(G)=2^{n-2}+1$；

证 见文献[3].

引理 3 若 G 是 (Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅵ) 型群，则当 $n>2$ 时，G 恰有 p 个循环极大子群和一个(p^{n-2},p) 型极大子群，它们分别为 $\langle b^ia\rangle(i=0,1,\cdots,p-1)$ 和 $\langle a^p,b\rangle$；而当 $n=2$ 时，G 恰有 $p+1$ 个循环极大子群.

证 见文献[3].

引理 4 (1) 若 G 是 (Ⅴ),(Ⅶ) 型群，则 G 恰有一个循环极大子群和两个非循环极大子群.

(2) 若 G 是 (Ⅳ) 型群，则当 $n=3$ 时，G 恰有三个循环极大子群；而当 $n>3$ 时，G 恰有一个循环极大子群和两个非循环极大子群.

证 见文献[3].

引理 5 若 G 是 (Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅵ) 型群，则 G 中 p^i $(2\leqslant i\leqslant n-1)$ 阶子群个数为 $p+1$，且恰为 p 个循环群和一个(p^{i-1},p) 型群.

证 因为 G 的 p^i 阶子群为 p^{i+1} 阶子群的极大子群，故由引理 2 和引理 3 易证得.

引理 6 若 G 是 (Ⅳ),(Ⅴ),(Ⅶ) 型群，则 G 中 2^i $(3\leqslant i\leqslant n-1)$ 阶子群个数为 $2^{n-i}+1$，且恰为一个循环群和 2^{n-i} 个非循环群.

证 由引理 2 和引理 4 立即可得.

定理 1 设 $|G|=p^n$，G 有循环极大子群，则 G 中各阶元个数如下：

	Ω_1	Ω_p	Ω_{p^2}	Ω_{p^3}	$\cdots$	$\Omega_{p^{n-1}}$	Ω_{p^n}
G_1	1	$p-1$	p^2-p	p^3-p^2	$\cdots$	$p^{n-1}-p^{n-2}$	p^n-p^{n-1}
G_2	1	p^2-1	p^3-p^2	p^4-p^3	$\cdots$	p^n-p^{n-1}	0
G_3	1	p^2-1	p^3-p^2	p^4-p^3	$\cdots$	p^n-p^{n-1}	0
G_4	1	1	$2+2^{n-1}$	2^2	$\cdots$	2^{n-2}	0
G_5	1	$1+2^{n-1}$	2	2^2	$\cdots$	2^{n-2}	0
G_6	1	2^2-1	2^2	2^3	$\cdots$	2^{n-1}	0
G_7	1	$2^{n-2}+1$	$2+2^{n-2}$	2^2	$\cdots$	2^{n-2}	0

证 (1) 因为 G_1 为循环群，所以易知 p^i 阶元个数为

$$\varphi(p^i)=p^i(1-\frac{1}{p})=p^i-p^{i-1}$$

故
$$\Omega(G_1)=(1,\ p-1,\ p^2-p,\ \cdots,\ p^n-p^{n-1})$$

(2) 当 G 为 G_2,G_3,G_6 时，由引理 5 知 p^i $(2\leqslant i\leqslant n-1)$ 阶元个数为

$$p\varphi(p^i)=p^{i+1}(1-\frac{1}{p})=p^{i+1}-p^i$$

由引理 2 知：p 阶子群有 $p+1$ 个，故 p 阶元个数为$(p+1)\varphi(p)=p^2-1$. 故

$$\Omega(G_2)=(1,\ p^2-1,\ p^3-p^2,\ \cdots,\ p^n-p^{n-1},\ 0)$$
$$\Omega(G_3)=(1,\ p^2-1,\ p^3-p^2,\ \cdots,\ p^n-p^{n-1},\ 0)$$
$$\Omega(G_6)=(1,\ 2^2-1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots\ 2^{n-1},\ 0)$$

(3) 当 G 为 G_4,G_5,G_7 时，由引理 6 知：2^i $(3\leqslant i\leqslant n-1)$ 阶元个数为 $\varphi(2^i)=2^{i-1}$.

又由引理 2 得：

对 G_4，2 阶子群个数为 1，故其 2 阶元个数为 $\varphi(2)=1$；

对 G_5，2 阶子群个数为 $2^{n-1}+1$，故其 2 阶元个数为 $2^{n-1}+1$；

对 G_7，2 阶子群个数为 $2^{n-2}+1$，故其 2 阶元个数为 $2^{n-2}+1$；

由各阶元个数之和为 2^n 可知其 4 阶元个数．故

$$\Omega(G_4)=(1,1,2+2^{n-1},2^2,\cdots,2^{n-2},0)$$

$$\Omega(G_5)=(1,1+2^{n-1},2,2^2,\cdots,2^{n-2},0)$$

$$\Omega(G_7)=(1,1+2^{n-2},2+2^{n-2},\cdots,2^{n-2},0)$$

定理 2　设 G 是具有循环极大子群的 p^n 阶群，其中 p 为素数，H 为群，则

(1) $H\cong G_i$ 的充要条件是 $\Omega(H)=\Omega(G_i)$，$i=1,4,5,7$.

(2) 若 $\Omega(H)=\Omega(G_i)$，则 $H\cong G_i$，$i=2,3,6$.

证　由定理 1 立即可得.

参考文献：

[1] Shi W J. A New Characterization of the Sporadic Simple Groups [A]. Proceedings of the 1987 Singapore Group Theory Conference [C]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1989: 531－540.

[2] 徐明耀. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1987.

[3] 陈彦恒，曹洪平. 各阶非平凡子群的个数为 $p+1$ 的 p-群的完全分类 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(2)：11－14.

[4] 曹　慧，曹洪平. 非交换图与群的结构 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2008，30(8)：1－4.

A New Characterization of Groups with Order p^n

YUAN Jin-zhi,　CAO Hong-ping

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Supposing G is a p-group with cyclic maximal subgroup, p is an prime number. In this paper, considering seven nonisomorphism types of G, the authors got the order of its elements and proved that only four types can be charactered by order of its elements.

Key words: order type; cyclic maximal subgroup; isomorphism

责任编辑　覃吉康