文章编号：1000－5471(2008)04－0165－04

微积分在求数列前 n 项和中的应用①

王 耀 富

黔西南民族师范高等专科学校，贵州兴义 562400

摘要： 求数列的前 n 项和问题无通用的解决办法，在教学过程中通过一些实例介绍求数列前 n 项和的导数法、极限法、积分法、代换法、复分析法、构造函数法显得十分必要和重要.

关　键　词： 导数法；极限法；积分法；代换法；复分析法；构造函数法

中图分类号：O172　　　　**文献标识码：A**

求数列的前 n 项和问题是常见的数学问题之一，文献[1]曾对拆项法、并项求和法、错位相减法、循环求和法、组合公式法、递推求和法、利用公式法、几何法、待定系数法等初等方法作过一些汇集和介绍. 本文试图运用微积分知识，把求数列前 n 项和的导数求和法、极限求和法、积分求和法、代换求和法、复分析求和法、构造函数法作一介绍. 除特别说明外，本文中的 j，k，m，n 均为非负整数，a，d，x，y 均为实数.

1　导数求和法

有许多类型的求和问题，可以通过求导数的办法来解决.

例 1　求 $\sum\limits_{k=j}^{n}k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)x^k$，其中 $x\neq 1$.

解：因为 $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=(\dfrac{x^{n+1}-1)}{(x-1})$，对此式两端关于变量 x 求 j 阶导数并整理可得：

$$\sum_{k=j}^{n}k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)x^k=x^j\cdot\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^{(j)}$$

例 2　求 $\sum\limits_{k=j}^{n}(k+m)(k+m-1)\cdots(k-j+1)x^k$，其中 $x\neq 1$.

解：因为 $\sum\limits_{k=0}^{n}x^{k+m}=\dfrac{x^{n+m+1}-x^m}{x-1}$，对此式两端关于变量 x 求$(m+j)$ 阶导数并整理可得：

$$\sum_{k=j}^{n}(k+m)(k+m-1)\cdots(k-j+1)x^k=x^j\left(\frac{x^{n+m+1}-x^m}{x-1}\right)^{(m+j)}$$

例 3　求 $\sum\limits_{k=1}^{n}kx^k$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^k$，$\cdots$ $\sum\limits_{k=1}^{n}k^jx^k$. 其中 $x\neq 1$.

解：在例 1 中取 $j=1$ 可得：$\sum\limits_{k=1}^{n}kx^k=x\cdot\left(\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$；

对上式两端继续关于变量 x 求导并整理可得：$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^k=x\cdot\left(x\cdot\left(\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'\right)'$

如此继续求导并加以整理可得：$\sum\limits_{k=1}^{n}k^jx^k=\underbrace{x\cdot(x\cdot(x\cdots(x}_{j\text{个}}\cdot\left(\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'\underbrace{)'\cdots)')'}_{j\text{次}}$

---

① 收稿日期：2008－03－10

作者简介：王耀富(1952－)，男，贵州安龙人，副教授，主要从事高等数学教学和研究.

例 4　求 $\sum_{k=1}^{n} k^j\cos(kx)$，$\sum_{k=1}^{n} k^j\sin(kx)$.

解：(ⅰ)若 $\sin\frac{x}{2}=0$，此时 $\sum_{k=1}^{n} k^j\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n} k^j$；(此求和问题将在例 5，例 6 中解决.)

(ⅱ)若 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$，则易知：$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$，$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}$；

对以上两式两端关于变量 x 求导得：

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2j}\sin(kx)=(-1)^j(\sum_{k=1}^{n}\sin(kx))^{(2j)}=(-1)^j\cdot\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^{(2j)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2j+1}\sin(kx)=(-1)^{j+1}(\sum_{k=1}^{n}\cos(kx))^{(2j+1)}=(-1)^{j+1}\cdot\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^{(2j+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2j}\cos(kx)=(-1)^j(\sum_{k=1}^{n}\cos(kx))^{(2j)}=(-1)^j\cdot\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^{(2j)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2j+1}\cos(kx)=(-1)^j(\sum_{k=1}^{n}\sin(kx))^{(2j+1)}=(-1)^j\cdot\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^{(2j+1)}.$$

利用例 3 和例 4 的结果可以解决 $\sum_{k=1}^{n} p_m{}^{(k)}x^k$，$\sum_{k=1}^{n} p_m{}^{(k)}\sin(kx)$，$\sum_{k=1}^{n} p_m{}^{(k)}\cos(kx)$(其中 $p_m{}^{(k)}$ 是关于 k 的 m 次多项式)等类型的求和问题.

2　极限求和法

有许多类型的求和问题，可以通过求极限的办法来解决.

例 5　求 $\sum_{k=j}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)$，$\sum_{k=1}^{n} k^j$ 和 $\sum_{k=j}^{n}(k+m)(k+m-1)\cdots(k-j+1)$.

解：显然当 $x\to 1$ 时，例 1，例 2 和例 3 的两端极限存在：

$$\sum_{k=j}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)=\lim_{x\to 1}(\frac{x^{n+1}-1}{x-1})^{(j)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^j=\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{n} k^j x^k=\lim_{x\to 1}\underbrace{x\cdot(x\cdot(x\cdots(x}_{j\text{个}}\cdot(\frac{x^{n+1}-1}{x-1})'\underbrace{)'\cdots)')'}_{j\text{次}}$$

$$\sum_{k=j}^{n}(k+m)(k+m-1)\cdots(k-j+1)=\lim_{x\to 1}(\frac{x^{n+m+1}-x^m}{x-1})^{(m+j)}$$

3　积分求和法

有许多类型的求和问题，可以通过积分的办法来解决.

例 6　求 $\sum_{k=1}^{n} k^j$

解：定义函数数列 $\{f_j(x)\}$ 如下：

$f_0(x)=x$，…，$f_j(x)=\int_0^x j\cdot f_{j-1}(t)\mathrm{d}t+\left[1-\int_0^1 j\cdot f_{j-1}(t)\mathrm{d}t\right]x$，…

利用文献[2]可以证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{j}=f_{j}(n)$，故可利用 $f_{j}(n)$ 来解决 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{j}$ 的求和问题.

特别地，取 $j=1$，因为 $f_{1}(x)=\int_{0}^{x} t\mathrm{d}t+\left[1-\int_{0}^{1} t\mathrm{d}t\right]x=\frac{x(x+1)}{2}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} k=f_{1}(x)\mid_{x=n}=\frac{n(n+1)}{2}$；取 $j=2$，则因为 $f_{2}(x)=\int_{0}^{x} 2\cdot\frac{t(t+1)}{2}\mathrm{d}t+\left[1-\int_{0}^{1} 2\cdot\frac{t(t+1)}{2}\mathrm{d}t\right]x=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} k^{2}=f_{2}(x)\mid_{x=n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 如此继续下去，即可以依次求出 $f_{3}(x)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} k^{3}$；$f_{4}(x)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} k^{4}$；…；$f_{j}(x)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} k^{j}$.

4　代换求和法

有许多类型的求和问题，可以通过适当的代换来解决. 下面仅以 Abel 代换为例来介绍.

例 7　求 $S_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(a+kd)x^{k}$.

解：若 $x=1$，则 $S_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(a+kd)=na+\frac{n(n+1)}{2}d$；

若 $x\neq 1$，则由 Abel 代换式得：

$$
\begin{aligned}
S_{n}&=(a+nd)\cdot\frac{x^{n+1}-x}{x-1}-d\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^{k+1}-x}{x-1}=(a+nd)\cdot\frac{x^{n+1}-x}{x-1}-\frac{d}{x-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}X^{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}X\right)\\
&=(a+nd)\cdot\frac{x^{n+1}-x}{x-1}-\frac{d}{x-1}\left[\frac{x^{n+1}-x^{2}}{x-1}-(n-1)x\right]\\
&=\frac{ax(x^{n}-1)}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^{2}}\left[x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}\right]
\end{aligned}
$$

例 8　求 $S_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos(kx)$

解：(ⅰ)若 $x=\pm 2m\pi$，则有 $S_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$；

(ⅱ)若 $x\neq\pm 2m\pi$，则 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$. $S_{n}=n\cdot\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)$,

因为 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})x=\frac{\cos x-\cos(nx)}{2\sin\frac{x}{2}}$

所以

$$
\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)=n\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\cos x-\cos(nx)}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}+\frac{n-1}{2}=\frac{(n+1)\cos(nx)-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}
$$

用 Abel 代换还可以解决：$\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+j-1)$；$\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)^{2}$；$\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)^{2}(k+2)$；$\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin(kx)$ 等许多类型的求和问题[3].

5　复分析求和法

有时，把实数列的求和问题转化为复数数列的求和问题，会使问题容易解决，称这种方法为复分析求和法. 在本节中，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

例 9 求 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(x+ky)$ 和 $S_n^* = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(x+ky)$.

解：不失一般性，不妨设 $y \neq \pm 2m\pi$.

因为 $S_n + \mathrm{i}S_n^* = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}$，分别取其实部和虚部即得：

$$S_n = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}\right)\right] = \frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\cos\left(x+\frac{n-1}{2}y\right),\ S_n^* = \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}\right)\right] = \frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\sin\left(x+\frac{n-1}{2}y\right)$$

特别地，当 $x=y$ 时，有 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$，$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$.

例 10 求 $S_n = \sum_{k=1}^{n}k^j\cos(kx)$ 和 $S_n^* = \sum_{k=1}^{n}k^j\sin(kx)$

解：由例 3 和例 6 可知 $S_n + \mathrm{i}S_n^* = \sum_{k=1}^{n}k^j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k$ 已经得以解决，记 $\sum_{k=1}^{n}k^j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k$ 为 $G(n, j, x)$，分别取 $G(n, j, x)$的实部和虚部即得 $S_n = \mathrm{Re}G(n, j, x)$，$S_n^* = \mathrm{Im}G(n, j, x)$.

6 构造函数法

有许多类型的求和问题，可以通过构造函数来解决，称这种方法为构造函数法.

在例 1 中，通过构造函数 $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$，把求 $\sum_{k=j}^{n}k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)x^k$ 的问题转化为求 $f(x)$ 的 j 阶导数与 x^j 的乘积 $f^{(j)}(x)\cdot x^j$；又如在例 6 中，通过构造函数数列 $\{f_j(X)\}$，把求和问题 $\sum_{k=1}^{n}k^j$ 转化成 $f_j(x)\mid_{x=n}$ 的计算问题.

参考文献：

[1] 王耀富. 求数列前 n 项和的初等方法介绍 [J]. 天府数学，1997，9：45－48.

[2] 郑少薇. 利用定积分求自然数列 n 次幂之有限和 [J]. 中学数学研究，1987，4：6－7.

[3] 程楚书. 一个数列求和的初等方法 [J]. 厦门数学通讯，1986，3：5－9.

How to Use Calculus in the Series Summation of the Former *n*

WANG Yao-fu

Southwest Guizhou Teacher's College for Nationalities, Xingyi Guizhou 562400, China

Abstract: There is no universal solution in the series summation of the former n . The article focuses on some methods, which are extremely necessary and important, for derivative, limit, integral, substitution, complex analysis, function with some examples.

Key words: derivative; limit; integral; substitution; complex analysis; function

责任编辑 张 枸