文章编号：1000－5471(2008)04－0028－04

弹簧系统一种常见的二维非线性振动①

包兴明，　周志坚，　袁玉全

四川理工学院 物理系，四川 自贡 643000

摘要：应用拉格朗日方程方法研究了理想对称双弹性振子做二维运动的变化规律，得到其微小振动的控制方程，用数值解法求解了振动方程，得到了振子运动的时程响应和轨迹图样. 结果表明：理想对称双弹性振子的振动为非简谐运动，它的振动周期在 y 方向与振幅的大小成反比，波形与振幅无关，可看成是一个变形了的余弦波.

关　键　词：非线性振动；对称双弹性振子；微小振动

中图分类号：O322　　　　**文献标识码：A**

由于扰动的存在，物体在平衡位置附近一般会作微小振动，由于其势能曲线一般不是二次形式，所以其微小振动不再是简谐振动. 非线性问题是当前物理研究中的热门问题，但其求解具有极大难度，除了少部分特殊情况可以用解析法解决以外，大部分问题要依靠数值方法，利用计算机为工具，才能得出其结果. 文献[1]研究了对称弹簧振子一维作非线性振动的几种情况，但对实际生活和生产中常见的二维非线性振动却未研究. 本文试图应用拉格朗日方程方法并用数值计算研究弹簧系统中一种常见的二维非线性振动，给出其非线性振动方程并给出振动曲线和轨迹.

1　对称双弹性振子的运动方程

对称双弹性振子的物理模型可以用一个在光滑水平面上运动的质量为 m 的质点来描述，它与两个弹性系数均为 k，原长均为 a 的弹簧相连. 在平衡时这两个弹簧成一条直线，此时弹簧为原长，质点在 xy 平面内(水平面)作微小振动，以质点的平衡位置为原点 o，建立坐标系(图 1).

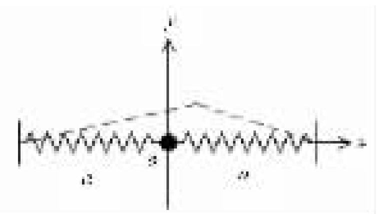

图 1　对称双弹性振子

系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{1}$$

$$V(x,\ y) = \frac{k}{2}[\sqrt{y^2 + (a-x)^2} - a]^2 + \frac{k}{2}[\sqrt{y^2 + (a+x)^2} - a]^2 \tag{2}$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V(x,\ y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}[\sqrt{y^2 + (a-x)^2} - a]^2 - \frac{k}{2}[\sqrt{y^2 + (a+x)^2} - a]^2 \tag{3}$$

根据保守力系的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{4}$$

得到系统的运动微分方程为

① 收稿日期：2008－04－08
作者简介：包兴明(1964－)，男，四川广汉人，研究生，讲师，主要从事大学物理教学及原子分子物理研究.

$$m\ddot{x}+2kx+\frac{ka(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}-\frac{ka(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}=0 \tag{5}$$

$$m\ddot{y}+2ky-\frac{kay}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}-\frac{kay}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}=0 \tag{6}$$

(5)式和(6)式，是一非线性耦合方程组[2-3]，这表明弹簧振子的运动是非线性振动，所以线性弹簧在此种组合下，由于其势能函数 $V(x,y)$ 不再是二次函数，必然产生非线性振动，(5)式和(6)式很难直接解析求解，但对此可以作数值计算.

2　方程的求解及振动曲线

为简单起见，假定该弹性振子质量 $m=1$ kg，弹簧原长为 $a=1.0$ m，弹性系数 $k=0.1$ N/m，初始条件为 $x_0=y_0=0.1$ m，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ m/s.

利用 maple 语言的超强数值计算功能[4]，在如上的条件下，求解方程(5)和(6)，得到 x,y 方向的振动曲线(图 2,3)和振子运动的轨迹(图 4).

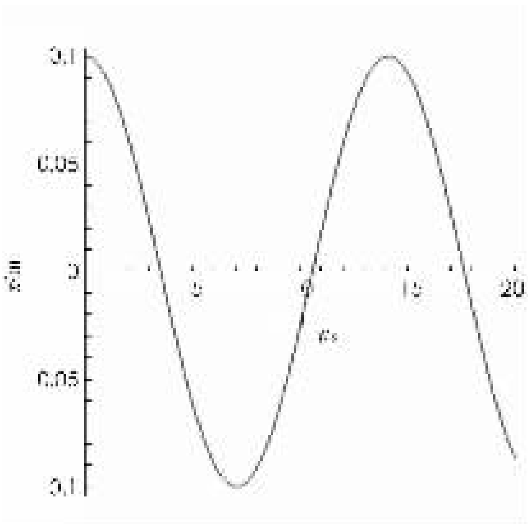

图 2　方向的振动曲线

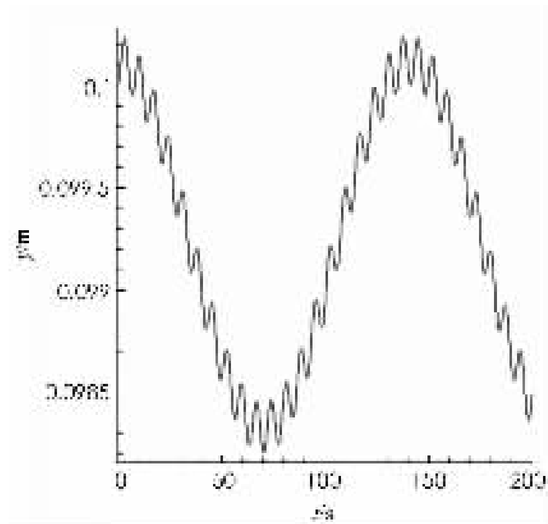

图 3　方向的振动曲线

在 $x_0=y_0=0.05$ m，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ m/s 的初始条件下，求解方程(5)和(6)，得到 x,y 方向的振动曲线(图 5,6)和振子运动的轨迹(图 7).

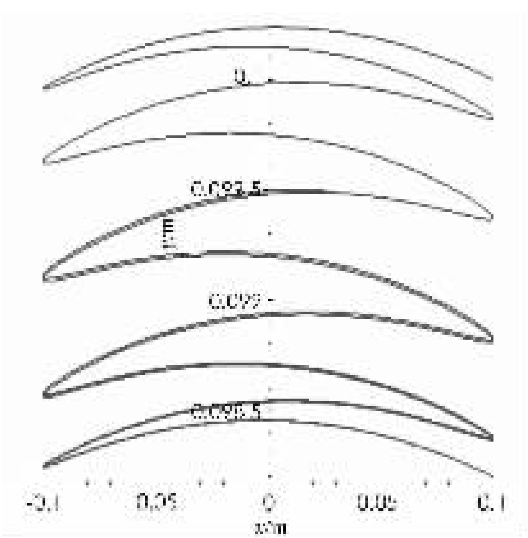

图 4　振子运动的轨迹

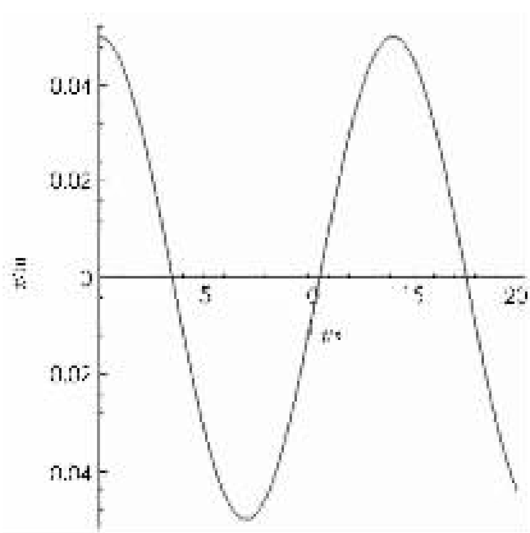

图 5　方向的振动曲线

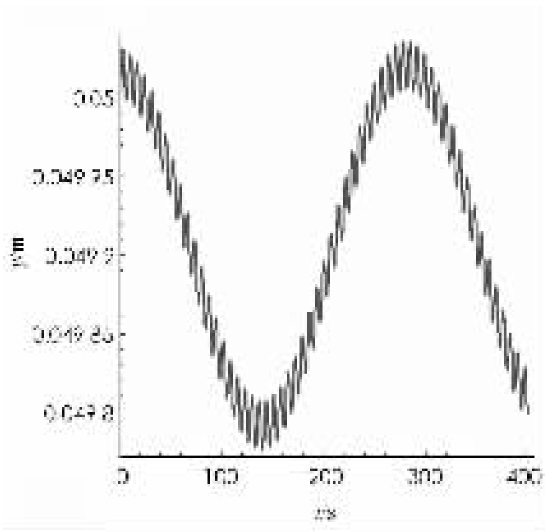

图 6　方向的振动曲线

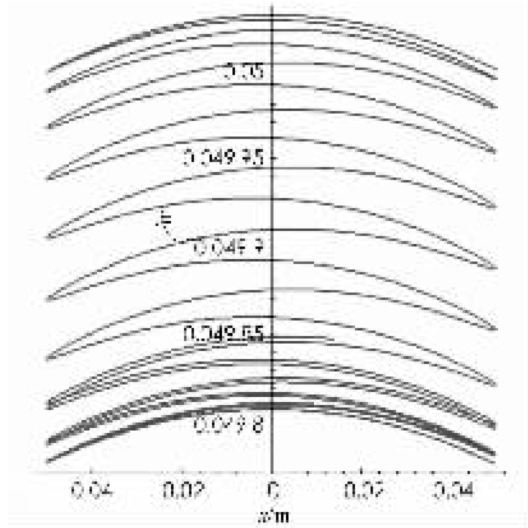

图 7　振子运动的轨迹

在 $x_0=y_0=0.025$ m，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ m/s 的初始条件下，求解方程(5)和(6)，得到 x，y 方向的振动曲线(图 8,9)和振子运动的轨迹(图 10).

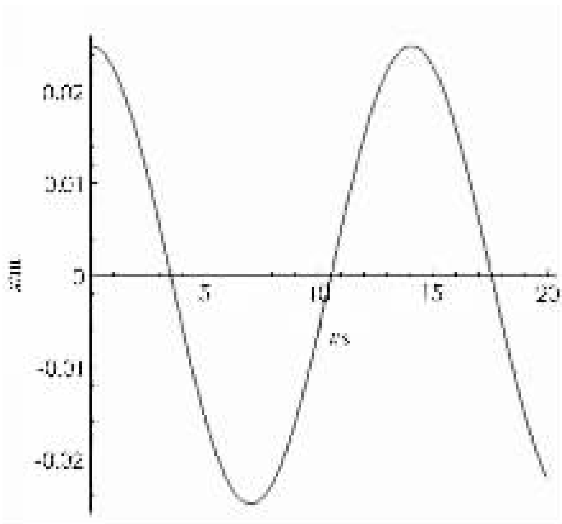

图 8　方向的振动曲线

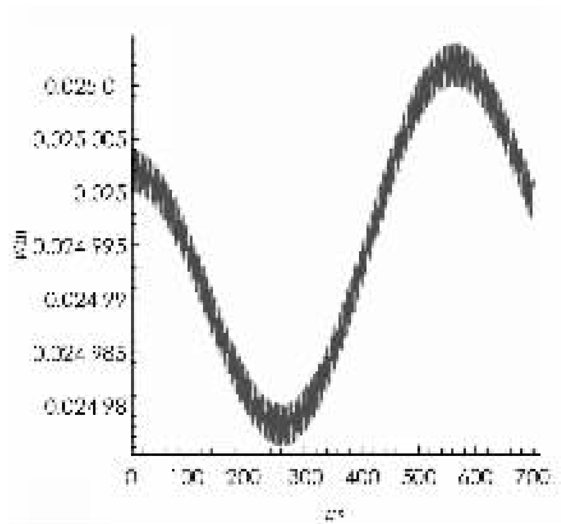

图 9　方向的振动曲线

由图 2－10 可以看出：

1) 在微小振动的条件下，对称弹性振子的振动是非简谐的周期性振动，初始条件为 $x_0=y_0=0.1$ m，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ m/s 时，x 方向振动的振幅为 0.1 m、周期约为 14 s，而 y 方向振动的振幅约为 0.001 m、周期约为 140 s；初始条件为 $x_0=y_0=0.05$ m，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ m/s 时，x 方向振动的振幅为 0.05 m、周期约为 14 s，而 y 方向振动的振幅约为 0.000 125 m、周期约为 280 s；初始条件为 $x_0=y_0=0.025$ m，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ m/s 时，x 方向振动的振幅为 0.025 m、周期约为 14 s，而方向振动的振幅约为 0.000 019 m、周期约为 680 s. 发现在其 y 方向运动周期与振幅的大小成反比[5]；x 方向振动周期几乎与振幅无关，依然主要由质量 m 和弹性系数 k 确定.

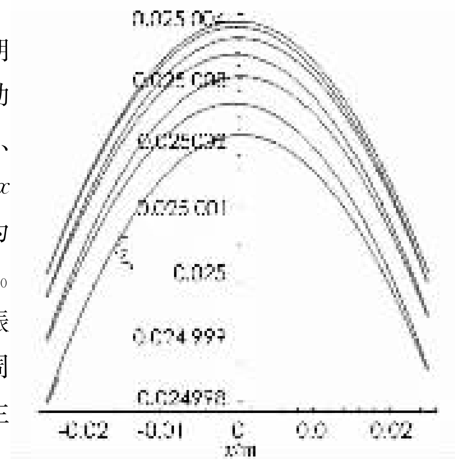

图 10　振子运动的轨迹

2) 在 y 方向的振动曲线可以看成是一个形变了的余弦曲线；其

上附加有依赖于振幅的高频颤动.

3）振子运动的轨迹是关于 y 方向振动的对称曲线. 该系统在振动过程中既无能量输入，也无能量输出，振动系统为非线性保守力系统，轨迹的对称性可以从机械能守恒定律加以解释[6].

3　结　　论

1）对弹簧系统中这种常见的二维非线性振动问题，可利用拉格朗日方法得到其振动控制微分方程，借助于计算机和 maple 语言在计算方面的超强功能，成功解决了该类非线性振动问题. 这种方法正确有效，利于实施，方法简便，这就为非线性问题的解决探索出了一种极好的求解途径.

2）对称双弹性振子的振动周期在 y 方向与振幅的大小成反比，该运动的波形彼此相似，与振幅无关，具体形状介于余弦波和三角波之间，可以看成是一个变形了的余弦波；其上附加有依赖于振幅的高频颤动. 而 x 方向振动周期几乎与振幅无关.

参考文献：

[1]　廖　旭，任学藻. 组合线性弹簧振子中的非线性振动 [J]. 大学物理，2008，27(2)：25－28.

[2]　卓崇培. 非线性物理学 [M]. 天津：天津科学技术出版社，1996，9：26－61.

[3]　刘式适，刘式达. 物理学中的非线性方程 [M]. 北京：北京大学出版社，2000：92－99.

[4]　洪　伟. MAPLE 6 实用教程 [M]. 北京：国防工业出版社，2001.

[5]　倪致祥，马　涛. 一种非简谐的微振动模型 [J]. 大学物理，2006，25(9)：14－16.

[6]　卢　艳. 一类非线性弹簧振子的振动特性分析 [J]. 广西物理，2003，24(4)：36－39.

The Nonlinear Oscillation of the Spring Oscillator in Two Dimension

BAO Xing-ming，　ZHOU Zhi-jian，　YUAN Yu-quan

Department of Physics，Sichuan University of Science and Engineering，Zigong 643000，China

Abstract：In this paper，two dimension vibrations of two flexible symmetric simple harmonic oscillator were studied. The nonlinear vibration equations were obtained by using the Lagrange function method，then solved them by using numerical method. Results showed that the small vibration of this ideal model was non simple harmonic，and the period of vibration in y direction was inverse ratio to its amplitude，but its wave form could be seen as a similar cosine wave shape which was independent with it.

Key words：nonlinear vibration；two flexible symmetric simple harmonic oscillator；the small vibration

责任编辑　潘春燕