第 33 卷　第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 8 月
Vol. 33　No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug.　2008

文章编号：1000-5471(2008)04-005-04

广义 Γ 分布的 Pearson-χ^2 距离及其渐近性①

金 秀 岩

广东松山职业技术学院 基础部，广东 韶关 512126

摘要：利用 Pearson-χ^2 距离和最大距离的定义，首次探讨了广义 Γ 分布的 Pearson-χ^2 距离及其渐近性，并作为特例得到了 Γ 分布、Weibull 分布、指数分布的 Pearson-χ^2 距离及其渐近性.

关　键　词：广义 Γ 分布；Pearson-χ^2 距离；渐近性

中图分类号：O212.4　　　　**文献标识码：A**

作为刻画 2 个密度函数差异程度的 Pearson-χ^2 距离，在数理统计学中有着广泛的应用. 文献[1]和[2]分别对 Pearson-χ^2 距离和 Pearson-χ^2 最大距离及其渐近性进行了讨论. 作为应用，文献 [2-4]给出了 0—1 分布、Poisson 分布、指数分布及正态分布的最大距离及其渐近性；文献 [5]和文献[6]分别给出了对数正态分布、Rayleigh 分布的 Pearson-χ^2 距离. 本文利用 Pearson-χ^2 距离和最大距离的定义，首次探讨了广义 Γ 分布的 Pearson-χ^2 距离、最大距离及其渐近性，并作为特例得到了 Γ 分布、Weibull 分布、指数分布的 Pearson-χ^2 距离及其渐近性.

1　定义与性质

定义 1　设 X 为随机变量，如果它的分布密度函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{-\alpha\beta}x^{\alpha\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right\},\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda>0,\ 0<x<+\infty$$

则称 X 服从广义 Γ 分布，记为 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)$.

定义 2[1]　设随机变量 X, Y 分别具有密度函数 $f(x)$，$g(x)$，并设 $f(x)>0$，$g(x)>0$ 若 $\int\left[\frac{g^2(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x<+\infty$，记

$$d^2(f,g)=\int\left[\frac{g^2(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x-1$$

称 $d^2(f,g)$ 是密度函数 $g(x)$ 到密度函数 $f(x)$ 的 Pearson-χ^2 距离.

定义 3[2]　设 $f(x)$，$g(x)$ 是 2 个随机变量 X, Y 的密度函数，并设 $f(x)>0$，$g(x)>0$，若 $d^2(f,g)$，$d^2(g,f)$ 都存在，则记 $D^2(f,g)=\frac{1}{2}\{d^2(f,g)+d^2(g,f)\}$，则称 $D^2(f,g)$ 为 2 个密度函数 $f(x)$，$g(x)$ 之间的 Pearson-χ^2 距离.

定义 4[3]　设 $f(x)$，$g(x)$ 是 2 个随机变量 X, Y 的密度函数，并设 $f(x)>0$，$g(x)>0$，若 $d^2(f,g)$，$d^2(g,f)$ 都存在，则记 $d_m^2(f,g)=\max\{d^2(f,g),d^2(g,f)\}$，则称 $d_m^2(f,g)$ 为 2 个密度函数 $f(x)$，$g(x)$ 之间的 Pearson-χ^2 最大距离.

3 种 Pearson-χ^2 距离之间的关系由性质 1 给出：

---

①　收稿日期：2007-07-11

作者简介：金秀岩(1961-)，男，吉林和龙人，副教授，主要从事概率论与数理统计研究.

性质 1 如果 $d^2(f, g)$, $d^2(g, f)$, $D^2(f, g)$ 及 $d_m^2(f, g)$ 都存在，则

(1) $\mathrm{mim}\{d^2(f, g), d^2(g, f)\} \leqslant D^2(f, g) \leqslant \max\{d^2(f, g), d^2(g, f)\}$；

(2)当 $f(x) \geqslant g(x)$ 时，有 $d^2(f, g) \leqslant d^2(g, f)$，且 $d^2(f, g) \leqslant D^2(f, g) \leqslant d^2(g, f)$；

(3)当 $f(x) \leqslant g(x)$ 时，有 $d^2(f, g) \leqslant d^2(g, f)$，且 $d^2(g, f) \leqslant D^2(f, g) \leqslant d^2(f, g)$.

2 主要结论

定理 1 设 $f(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_1)$ 的密度函数，$g(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_2)$ 的密度函数，当 α, β 确定且 $2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2 < \lambda_1$ 时，则

$$d^2(f, g) = \left[\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^\beta(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)}\right]^\alpha - 1 \tag{1}$$

且当 $\lambda_1 \to \lambda_2$ 时，$d^2(f, g) \to 0$；当 $\lambda_1 \to 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d^2(f, g) \to +\infty$.

证

$$\begin{aligned} d^2(f, g) &= \int\left[\frac{g^2(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x - 1 \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\right)^{-\alpha\beta}x^{\alpha\beta-1}\exp\left\{-\frac{2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta}{\lambda_1^\beta\lambda_2^\beta}x^\beta\right\}\mathrm{d}x - 1 \\ &= \left(\frac{\lambda_2\sqrt[\beta]{2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta}}{\lambda_1^2}\right)^{-\alpha\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt[\beta]{2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta}}\right)^{-\alpha\beta}x^{\alpha\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt[\beta]{2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta}}}\right)^\beta\right\}\mathrm{d}x - 1 \\ &= \left[\frac{\lambda_2^\beta(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)}{\lambda_1^{2\beta}}\right]^{-\alpha} - 1 = \left[\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^\beta(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)}\right]^\alpha - 1 \end{aligned}$$

所以，式(1)成立. 而且由式(1)，当 $\lambda_1 \to \lambda_2$ 时，有 $d^2(f, g) \to 0$；当 $\lambda_1 \to 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d^2(f, g) \to +\infty$.

证毕.

类似地，容易得到：

定理 2 设 $f(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_1)$ 的密度函数，$g(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_2)$ 的密度函数，当 α, β 确定，且 $0 < \lambda_1 < 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，则

$$d^2(g, f) = \left[\frac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^\beta(2\lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta)}\right]^\alpha - 1 \tag{2}$$

且当 $\lambda_1 \to \lambda_2$ 时，$d^2(f, g) \to 0$；当 $\lambda_1 \to 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d^2(f, g) \to +\infty$.

证 类似定理 1.

由定理 1、定理 2 容易得到：

定理 3 设 $f(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_1)$ 的密度函数，$g(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_2)$ 的密度函数，当 α, β 确定，且 $2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2 < \lambda_1 < 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，则

$$D^2(f, g) = \frac{[\lambda_1^{3\beta}(2\lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta)]^\alpha + [\lambda_2^{3\beta}(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)]^\alpha}{2(\lambda_1\lambda_2)^{\alpha\beta}[(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)(2\lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta)]^\alpha} - 1 \tag{3}$$

证 由定义 2，以及式(1)，式(2)，有

$$\begin{aligned} D^2(f, g) &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^\beta(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)}\right]^\alpha - 1 + \left[\frac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^\beta(2\lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta)}\right]^\alpha - 1\right\} \\ &= \frac{[\lambda_1^{3\beta}(2\lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta)]^\alpha + [\lambda_2^{3\beta}(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)]^\alpha}{2(\lambda_1\lambda_2)^{\alpha\beta}[(2\lambda_1^\beta - \lambda_2^\beta)(2\lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta)]^\alpha} - 1 \end{aligned}$$

证毕.

定理 4 设 $f(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_1)$ 的密度函数，$g(x)$ 是广义 Γ 分布 $\mathrm{G}\Gamma(\alpha, \beta, \lambda_2)$ 的密度函数，当 α, β 确定，且 $2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2 < \lambda_1 < 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，则

$$d_m^2(f,g)=\begin{cases}\left[\dfrac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}\right]^{\alpha}-1,\ 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2<\lambda_1<\lambda_2,\\ \left[\dfrac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}\right]^{\alpha}-1,\ \lambda_2<\lambda_1<2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2.\end{cases}\tag{4}$$

且当 $\lambda_1\to\lambda_2$ 时，$d_m^2(f,g)\to 0$；当 $\lambda_1\to 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d_m^2(f,g)\to+\infty$；当 $\lambda_1\to 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d_m^2(f,g)\to+\infty$.

证　由定理 1、定理 2 知

$$d^2(f,g)=\left[\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}\right]^{\alpha}-1,d^2(g,f)=\left[\frac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}\right]^{\alpha}-1$$

为了比较 $d^2(f,g)$，$d^2(g,f)$ 的大小，构造辅助函数：$F(x)=\left(x^{3\beta}\dfrac{2-x^{\beta}}{2x^{\beta}-1}\right)^{\alpha}$.

由于 $F(1)=1$，且当 $2^{-\frac{1}{\beta}}<x<2^{\frac{1}{\beta}}$ 时，$F'(x)=\alpha\left(x^{3\beta}\dfrac{2-x^{\beta}}{2x^{\beta}-1}\right)^{\alpha-1}\left[-\dfrac{6\beta x^{3\beta-1}(x^{2\beta}-x^{\beta}+1)}{(2x^{\beta}-1)^2}\right]<0$. 又由于

$$\frac{\left[\dfrac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}\right]^{\alpha}}{\left[\dfrac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}\right]^{\alpha}}=\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{3\beta}\frac{2-\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\beta}}{2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\beta}-1}\right]^{\alpha}=F\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

所以当 $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}>1$ 时，即当 $\lambda_1>\lambda_2$ 时，有 $F\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)<F(1)=1$，从而

$$\left[\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}\right]^{\alpha}<\left[\frac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}\right]^{\alpha}$$

又当 $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}<1$，即当 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，有 $F\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)>F(1)=1$，从而

$$\left[\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}\right]^{\alpha}>\left[\frac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}\right]^{\alpha}$$

式(4)成立.

由式(4)，当 $\lambda_1\to\lambda_2$ 时，有 $d_m^2(f,g)\to 0$；当 $\lambda_1\to\dfrac{\lambda_2}{\sqrt[\beta]{2}}$ 时，$d_m^2(f,g)\to+\infty$；当 $\lambda_1\to\lambda_2\sqrt[\beta]{2}$ 时，$d_m^2(f,g)\to+\infty$.

证毕.

3　推　　论

在定理 1 - 4 中，取 $\alpha=1$，则可以得到 Weibull 分布的 Pearson - χ^2 距离及其渐近性的结论：

推论 1　设 $f(x)$ 是 Weibull 分布 $W(\beta,\lambda_1)$ 的密度函数，$g(x)$ 是 Weibull 分布 $W(\beta,\lambda_2)$ 的密度函数且 β 确定，则：

(1) $2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2<\lambda_1$ 时

$$d^2(f,g)=\frac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}-1$$

且当 $\lambda_1\to\lambda_2$ 时，$d^2(f,g)\to 0$；当 $\lambda_1\to 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d^2(f,g)\to+\infty$.

(2) $0<\lambda_1<2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时

$$d^2(g,f)=\frac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}-1$$

且当 $\lambda_1\to\lambda_2$ 时，$d^2(f,g)\to 0$；当 $\lambda_1\to 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d^2(f,g)\to+\infty$.

(3) $2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2<\lambda_1<2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时

$$D^2(f,g)=\frac{\lambda_1^{3\beta}(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})+\lambda_2^{3\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})}{2(\lambda_1\lambda_2)^{\beta}(2\lambda_1^{\beta}-\lambda_2^{\beta})(2\lambda_2^{\beta}-\lambda_1^{\beta})}-1$$

(4) $2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2 < \lambda_1 < 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时

$$d_m^2(f, g) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1^{2\beta}}{\lambda_2^{\beta}(2\lambda_1^{\beta} - \lambda_2^{\beta})} - 1, & 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_2 \\ \dfrac{\lambda_2^{2\beta}}{\lambda_1^{\beta}(2\lambda_2^{\beta} - \lambda_1^{\beta})} - 1, & \lambda_2 < \lambda_1 < 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2 \end{cases}$$

且当 $\lambda_1 \to \lambda_2$ 时，$d_m^2(f, g) \to 0$；当 $\lambda_1 \to 2^{-\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d_m^2(f, g) \to +\infty$；当 $\lambda_1 \to 2^{\frac{1}{\beta}}\lambda_2$ 时，$d_m^2(f, g) \to +\infty$.

同理，当 $\beta = 1$，$\alpha = \beta = 1$ 时，由定理 1-4，容易得到 Γ 分布、指数分布的 Pearson-χ^2 距离、最大距离及其渐近性.

参考文献:

[1] 李开灿. Pearson-χ^2 距离的若干性质 [J]. 数学的实践与认识，2003，33(1)：49-53.

[2] 陈光曙，朱成莲. 几个重要分布的 Pearson-χ^2 最大距离及其渐近性 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2005，29(5)：417-419.

[3] 陈光曙. 关于新 Pearson-χ^2 距离的性质 [J]. 河北科技大学学报，2006，27(1)：18-21.

[4] 陈光曙. Pearson-χ^2 的最大距离的性质 [J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，2005，28(4)：402-404.

[5] 王志祥，陈光曙. 对数正态分布的 Pearson-χ^2 距离 [J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版)，2005，21(4)：106-109.

[6] 朱成莲. 关于 Rayleigh 分布的 Pearson-χ^2 距离 [J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版)，2006，5(4)：259-263.

[7] 曾青松，彭作祥. 一类分布的尾端点估计量的收敛性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(6)：976-980.

The Pearson-χ^2 Distance of Generalized Gamma Distribution and Its Asymptotic Property

JIN Xiu-yan

Department of Basic Courses, Guangdong Songshan Polytechnic College, Shaoguan Guangdong 512126, China

Abstract: It is discussed that the Pearson-χ^2 distance of Generalized gamma distribution and its asymptotic using the definition of Pearson-χ^2 distance and maximum distance for the first time, and it is obtained that the distance of Γ distribution, Weibull distribution, exponential distribution and its asymptotic property.

Key words: generalized gamma distribution; Pearson-χ^2 maximum distance; asymptotic property

责任编辑 张 枸