文章编号：1000-5471(2008)04-0001-04

考虑每一次索赔额的无索赔折扣模型①

宋　熠，　柏　超

中南林业科技大学 理学院，长沙 410004

摘要： 考虑了每一次索赔额对 NCD 系统及保险公司期望保费的影响，对 NCD 系统进行了改进，证明了改进后的系统存在唯一的平稳分布，并通过例子说明了改进后的 NCD 系统与原系统的差异.

关　键　词： 无赔款折扣系统；费率；索赔权度；无索赔折扣；平稳分布

中图分类号： O211.9　　**文献标识码：** A

目前，非寿险精算理论的应用与研究在我国尚处于初始阶段，而对无赔款优待模型(NCD，no claim discount)的研究更是少之又少. NCD 系统是非寿险中机动车辆保险广泛采用的一种经验费率厘定机制，该机制的基本思路是，若驾驶者在上一年度不发生索赔，则保险公司在续保年度对其应缴保费实施某种程度的优惠.

对于该系统的研究，成世学首先给出了该系统的理论基础，证明了该系统具有唯一的平稳分布[1,2]；肖艳颖考虑了索赔额对该系统的影响，提出了计算费率的新方法[2]；Doron Kliger 等人则利用效用理论从利益平衡的角度得到建立 NCD 系统的新方法[4,5]. 然而以上研究都没有考虑每一次索赔额对 NCD 系统的影响. 虽然之前有学者通过实证分析提出了考虑索赔额的情况[6]，但是并未给出具体的实施办法. 本文将从这个角度，对 NCD 系统进行研究.

1　NCD 系统及其基本假设

关于 NCD 系统的完全描述，应包含以下 4 个方面的内容[1,2]：

1.1　折扣类总数与各折扣类的折扣水平

假设共有 $n+1$ 个折扣类，折扣类 i 的折扣水平为 d_i，假定它们可按递增次序排列如下：

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{n-1} < d_n < 1$$

1.2　索赔发生的概率

设 $p_k(k=0, 1, 2, \cdots)$ 为投保人在一年中恰发生 k 次索赔的概率，其分布已知.

1.3　向高折扣转移的共性

投保人若在某一年中不发生索赔，则在下一保险年度或仅递增一个折扣类，或停留在最高折扣类(如投保人原已位于最高折扣类).

1.4　向低折扣转移的特殊性

各类 NCD 系统的差别仅体现在向低折扣类的转移法则上，不同的保险公司根据自己的财务状况和利润目标制定不同的转移法则，基本上表现为一旦发生索赔就向低折扣类转移.

2　考虑每一次索赔额的 NCD 系统

2.1　模型的构建

上述 NCD 系统中只考虑了索赔次数的历史纪录，其奖惩措施仅以索赔次数为依据，而没有考虑每一

①　收稿日期：2007-03-26
作者简介：宋　熠(1982-)，男，湖南怀化人，硕士，主要从事保险数学、概率统计应用的研究.

次索赔额对 NCD 系统的影响，在识别风险质量上存在着一定的偏差，是不够完善的. 因此应综合考虑索赔次数与索赔额对系统的联合影响，建立索赔次数与索赔额的联合函数，以便更准确的描述保单持有人的风险水平，使费率能更准确的反映风险状况. 在此基础上对原 NCD 系统进行改进.

定义　设 $k(0 \leqslant k < +\infty)$ 为某一保险年度内发生的索赔次数，$C_i(0 < C_i < +\infty, 1 \leqslant i \leqslant k)$ 为该保险年度内每一次的索赔额，则称 $S = \sum_{i=1}^{k} C_i$ 为该保险年度的索赔权度.

定理 1　索赔权度 $S = \sum_{i=1}^{k} C_i$ 的概率分布为 $F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(K = k) F_C^{*k}(x)$

证

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P_S(S \leqslant x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_S(S \leqslant x \mid K = k) P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(K = k) P_S(C_1 + C_2 + \cdots + C_k \leqslant x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(K = k) F_C^{*k}(x) \end{aligned}$$

其中 $F_C^{*k}(x)$ 表示分布函数 $F_C(x)$ 的 k 次卷积.

下面用索赔权度代替原 NCD 系统中的索赔次数. 保险公司根据索赔权度和以往索赔历史纪录同样将 NCD 系统分为 $n+1$ 个等级，例如等级 0 代表 0 元，等级 1 代表 1 000 元，等级 2 代表 2 000 元，……，等级 n 代表 $n \times 1\ 000$ 元，不同的等级对应不同的折扣率.

设 $q_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ 表示一个保险年度发生索赔权度为 $i \times 1\ 000$ 的概率，即考虑了索赔额的 NCD 系统的转移概率. 可以作如下的对应：

$$q_0 = P_S(S = 0)$$
$$q_1 = P_S(0 < S \leqslant 1\ 000)$$
$$\cdots\cdots$$
$$q_n = P_S((n-1) \times 1\ 000 < S \leqslant n \times 1\ 000)$$

容易验证，$0 \leqslant q_0, q_1, \cdots q_n \leqslant 1$ 并且满足 $\sum_{i=0}^{n} q_i = 1$.

对于改进后的 NCD 系统，其转移规则是，发生索赔的总权度大于 0 小于 1 000 对应原 NCD 系统发生 1 次索赔，总权度大于 2 000 对应于原系统的索赔次数超过 2 次.

2.2　平稳分布的存在唯一性

引理 1　不可约有限马尔可夫链只有正常返态[8].

定理 2　对于任一考虑每一次索赔额的 NCD 系统描述的马尔可夫链 $\{X_k : k \geqslant 0\}$，均存在唯一平稳分布.

证明：总存在有限个折扣类：

$$0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m < n$$

使得位于最高折扣类 n 的投保者，可以逐次以正概率经由折扣类 $i_m, i_{m-1}, \cdots, i_2, i_1$ 而返至折扣类 0. 其次，由折扣类 0 出发可以以正概率 q_0 逐次经由折扣类 $i_1, i_2 \cdots, i_m$ 而达到最高折扣类 n . 这表明各状态之间是相通的，从而是不可约的. 又该马尔可夫链仅含有限个状态，故由引理 1 知，它是正常返的，从而是遍历的，故具有唯一平稳分布，记为 $\prod = (\pi_0, \pi_1, \cdots \pi_n)$.

由文献[9]还知道，对任意折扣类 $i(0 \leqslant i \leqslant n)$，都有

$$\lim_{k \to \infty} P(X_k = i) = \pi_i, i = 0, 1, 2 \cdots, n$$

设 a 为全额保费，有 N 位投保人保险，假定中途不退保，在相隔充分长的一段时间后，分布在各折扣类的人数将稳定在 $N\pi_i$. 这样，对保险公司来说，在充分长的时间后，每年度的保费总收入 T 可由下式估算：

$$T = Na \sum_{i=0}^{n} \pi_i (1 - d_i) \tag{1}$$

3　应用实例

某车辆保险的 NCD 制度包括 0%，10%，30%，50%，60% 5 个折扣组别，转移规则如下：

(1)年度无赔案发生，保单持有人上升一级或停留在最高折扣组别；

(2)年度有一次赔案发生，保单持有人降 2 级或停留在 0%折扣组别；

(3)年度有一次以上赔案发生，保单持有人降至 0%折扣组别.

另外，假设年度内可能发生的理赔次数为服从参数 $\lambda = 0.5$ 的泊松分布，分布函数为 $P(K = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$；每次可能产生的索赔额为 300，600，900，相应的概率为 0.5，0.4，0.1.

对改进后的 NCD 系统，其转移矩阵、理赔次数、理赔额分别如表 1,2,3 所示.

表 1　转移矩阵

折扣组别/%	0%	10%	30%	50%	60%
0	$1-q_0$	q_0	0	0	0
10	$1-q_0$	0	q_0	0	0
30	$1-q_0$	0	0	q_0	0
50	$1-q_0-q_1$	q_1	0	0	q_0
60	$1-q_0-q_1$	0	q_1	0	q_0

表 2　理赔次数分布列

k	0	1	2	3	4	……
$P(K = k)$	0.606 53	0.303 27	0.075 82	0.012 64	0.001 58	……

表 3　理赔次数分布列

C	300	600	900
$P(C)$	0.5	0.4	0.1

由定理 1 有：

$$P_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(K = k) P_C^{*k}(X = x)$$
$$= 0.1 P_C^{*0}(X = x) + 0.3 P_C^{*1}(X = x) + 0.4 P_C^{*2}(X = x) + 0.2 P_C^{*3}(X = x)$$

其中 S 的可能取值为 $S = 0, 300, 600, 900, 1200, 1500, 1800, 2100, 2400, 2700 \cdots\cdots$

故

$$q_0 = P_S(S = 0) = P(K = 0) = 0.606\ 53$$
$$q_1 = P_S(0 < S \leqslant 1\ 000) = P_S(S = 300) + P_S(S = 600) + P_S(S = 900)$$

通过计算有：

$$P_S(S = 300) = 0.1516\ 35,\ P_S(S = 600) = 0.140\ 263,\ P_S(S = 900) = 0.062\ 235$$
$$q_1 = 0.151\ 635 + 0.140\ 263 + 0.062\ 235 = 0.354\ 133 \approx 0.354\ 13$$

记转移矩阵为 Q，解方程：

$$\prod Q = \prod$$

得：

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.305\ 55, 0.210\ 150.190\ 560.115\ 58, 0.178\ 16) \tag{2}$$

记原 NCD 系统转移矩阵为 P，解方程：

$$\prod P = \prod$$

得：

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.321\ 45, 0.215\ 31, 0.182\ 27, 0.110\ 55, 0.170\ 42) \tag{3}$$

比较式(2)和式(3)可知：

1）考虑每一次索赔额的 NCD 系统的保单持有人处在 0 折扣类和 10%低折扣类(即无折扣和低折扣)的最终概率要比原 NCD 系统的要小，特别是处于 0 折扣类的要小得多. 这表明了采用了新的 NCD 制度，即考虑了索赔额对 NCD 系统的影响后，保单持有人更倾向于向高折扣类转移，从而减少了年度赔偿总额.

2) 改进后 NCD 系统的保单持有人处于高折扣类的最终概率比原 NCD 系统的大，这表明在新的制度下，处于高折扣类的保单持有人较原系统都有增加，对整体来说，发生索赔的情况有所减少. 例如对于100元的小额索赔，保单持有人会采取不报案的做法，以风险损失自负来换取折扣额.

最后通过式(1)计算保险公司年度期望保费：

对新 NCD 系统：

$$T = Na(0.305\,55 + 0.210\,15 \times 90\% + 0.190\,56 \times 70\% + 0.115\,58 \times 50\% + 0.178\,16 \times 40\%) = 0.757\,131\,Na$$

对原 NCD 系统：

$$T = Na(0.321\,45 + 0.215\,31 \times 90\% + 0.182\,27 \times 70\% + 0.110\,55 \times 50\% + 0.170\,42 \times 40\%) = 0.766\,261\,Na$$

对于改进后的 NCD 系统，保险公司年度期望保费比改进前的要小，而保费是衡量风险的指标，这客观说明考虑了索赔额后，保险公司所承担的风险比改进前要小.

从以上几点可以看出，由于考虑了每一次的索赔额，新的 NCD 制度加大了对风险防范的力度，从而使保险公司面临较小的风险. 这对于保险公司维持财务稳定、进行业务扩展有着积极的作用.

参考文献：

[1] 成世学，郑苏晋. NCD 系统的数学建模与稳态分析 [J]. 应用概率统计，2003，19(1)：93－98.
[2] 成世学，秦 婷，伍宪彬. NCD 系统的数学理论 [J]. 应用数学学报，2005，28(2)：358－365.
[3] 肖艳颖，孙 静，邱菀华. 计算费率的新方法——改进的 NCD 系统 [J]. 系统工程理论与实践，2003(7)：40－43.
[4] Doron Kliger，Benny Levikson. Pricing no Claims Discount Systems [J]. Insurance：Mathematics and Economics，2002，(31)：193－195.
[5] Venter. A Comparative Analysis of most European and Japanese Bonus Malussystem：Extention [J]. Journal of Risk and Insurance，1991，58(3)：542－547.
[6] 李 永. 保险经验估费：我国机动车辆保险 NCD 系统的实证分析 [J]. 中国物价，2005(6)：53－55.
[7] 谢志刚，韩天雄. 风险理论与非寿险精算 [M]. 天津：南开大学出版社，2000，6：284－289.
[8] 闵花玲. 随机过程 [M]. 上海：同济大学出版社，1987.
[9] S. M. 劳斯. 随机过程 [M]. 何声武，谢盛荣，程一明译. 北京：中国统计出版社，1997，7：123－126.
[10] 张瑞川. 重庆市农业保险现状及对策研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2004，29(5)：810－812.

The No Claim Discount System Considered Every Claim Size

SONG Yi， BAI Chao

School of science，Central South University of Forestry and Technology，Changsha 410004，China

Abstract：In this paper，the authors consider the improved No-Claim Discount system on the base of the original system，which is popular in most of countries. The authors take the influence of every claim size on the insurance company expected premium and economic stability into consideration. Then，that the uniqueness exists of the improved system is proved. At last，through some examples the differences between the two systems are presented.

Key words：no-claim discount system；rate；claim weight；no-claim discount；stable distribution

责任编辑 张 枸