文章编号：1000－5471(2008)03－0173－04

逆序配方法及其应用[①]

钱微微[1]，　蔡耀志[2]

1. 浙江中医药大学 药学院，杭州 310053；2. 浙江大学 数学系，杭州 310027

摘要： 提出了一种新的将二次型化为标准型的配方法——逆序配方法．并用这种新的配方法给出了一般椭圆曲线所围面积公式和一般空间椭球方程体积公式；还用此方法证明了 Jacoby 定理．

关　键　词： 配方法；二次型；标准型；Jacoby 定理

中图分类号：O151　　　　**文献标识码：A**

本文提出了一种新的将二次型化为标准型的配方法，为区别于一般的拉格朗日配方法[1]中按顺序进行的配方，我们称之为逆序配方法．用此方法我们可以得到一般椭圆曲线方程所围面积公式和一般椭球方程的体积公式，并可将此结果推广至 n 维空间．还可用此方法证明 Jacoby 定理[2]．

我们所考察的二次型为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = X'AX \tag{1}$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为对称阵，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$．

定理 1　若对二次型(1)作如下变换：

$$\begin{cases} x_i = y_i + \tau_i y_n & i = 1,2,\cdots,n-1 \\ x_n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

其中 τ_i 满足方程：

$$A_{n-1} T + B_{n-1} = 0 \tag{3}$$

这里 $T = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1})'$，$B_{n-1} = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n})'$，$A = (a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$．则二次型变换后化成

$$f = Y'_{n-1} A_{n-1} Y_{n-1} + f(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, 1) y_n^2 \tag{4}$$

其中 $Y_{n-1} = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})'$．

证　将二次型改写成

$$\begin{aligned} f = X'AX &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j + 2(a_{1n}x_1 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1})x_n + a_{nn}x_n^2 \\ &= X'_{n-1} A_{n-1} X_{n-1} + 2x_n X'_{n-1} B_{n-1} + a_{nn} x_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $X_{n-1} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})'$．将所作之变换写成向量形式：

$$X_{n-1} = Y_{n-1} + y_n T \qquad x_n = y_n \tag{6}$$

将(6)代入(5)得：

$$f = Y'_{n-1} A_{n-1} Y_{n-1} + 2y_n Y'_{n-1}(A_{n-1} T + B_{n-1}) + (T'A_{n-1}T + 2T'B_{n-1} + a_{nn}) y_n^2 \tag{7}$$

由于 T 满足(3)式，从而(7)式第二项为零．若设 $X^0 = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, 1)$，则由(5)式知(7)式第三项为

① 收稿日期：2007－12－12
作者简介：钱微微(1968－)，女，浙江杭州人，讲师，硕士，主要从事应用数学的研究．

$$(X^0)'AX^0 = T'A_{n-1}T + 2T'B_{n-1} + a_{nn} = f(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, 1) = f(X^0) \tag{8}$$

于是得证定理.

定理 2　(4) 式中 $f(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, 1)$ 可简化成:

$$f(X^0) = f(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, 1) = \frac{|A|}{|A_{n-1}|} \tag{9}$$

其中 $|A|$ 是矩阵 A 的行列式, $|A_{n-1}| \neq 0$ 是行列式 $|A|$ 的 $n-1$ 阶主子式.

证　如果将 A_{n-1} 中每一列记为 $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{n-1,k})'$, $k = 1,2,\cdots,n-1$, 而 $B_{n-1} = a_n$, 则应用克兰姆法则于(3)得:

$$\tau_k = \frac{|(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, -B_{n-1}, a_{k+1}, \cdots, a_{n-1})|}{|A_{n-1}|} = \frac{(-1)^{n-k}|(a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n)|}{A_{n-1}}$$

这里 $k = 1,2,\cdots,n-1$. τ_k 的分子可看成是行列式 $|A|$ 中第 a_{nk} 元素的代数余子式, 若记 a_{nk} 的代数余子式为 $A(n, k)$, 则

$$\tau_k = \frac{A(n, k)}{|A_{n-1}|} \qquad k = 1,2,\cdots,n-1$$

注意到

$$|A_{n-1}| = A(n, n)$$

$$T = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, 1)' = \frac{(A(n, 1), A(n, 2), \cdots, A(n, n))'}{|A_{n-1}|}$$

$$f(X^0) = (X^0)'AX^0 = \frac{1}{|A_{n-1}|^2}(A(n, 1), \cdots, A(n, n))A(A(n, 1), \cdots, A(n, n))'$$

$$= \frac{1}{|A_{n-1}|^2}A(n, 1), \cdots, A(n, n))(0, 0, \cdots, 0, |A|)' = \frac{|A|}{|A_{n-1}|}$$

定理得证.

下面给出这种配方法的应用.

推论 1　一般二次曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2ax + 2by + D = 0$ 若为一个椭圆曲线方程式, 则它所围成面积 S 有公式:

$$S = \frac{-\Delta}{\delta^{3/2}} \cdot \pi$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & a \\ B & C & b \\ a & b & D \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \tag{10}$$

证　该椭圆曲线方程式可看成以下二次型当 $t = 1$ 的情形:

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2axt + 2byt + Dt^2 \tag{11}$$

将定理 1 及定理 2 应用于(11) 即可化成:

$$f = Y'_2 A_2 Y_2 + \frac{\Delta}{\delta}y_3^2 \tag{12}$$

其中 $Y_2 = (y_1, y_2)'$, $y_3 = t$, $A_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$.

$Y'_2 A_2 Y_2$ 可用旋转变换化成标准式得:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \frac{\Delta}{\delta}z_3^2 = 0 \tag{13}$$

其中 λ_1, λ_2 是 A_2 的特征值, 显然 $\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \delta$, 令 $t = 1$ 即可将椭圆方程化成:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \tag{14}$$

由(14) 及标准椭圆的面积公式 $S = ab\pi$ 推得最一般椭圆的面积公式为:

$$S=\sqrt{\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1}\cdot\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2}}\cdot\pi=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\cdot\frac{-\Delta}{\delta}\pi=\frac{-\Delta}{\delta^{3/2}}\pi$$

推论 2　一般空间椭球方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

有以下体积公式：

$$V=\frac{4}{3}\left|\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}^{3/2}}\right|\pi \tag{15}$$

公式(10)，(15) 完全可以推广到 n 维空间，在此略去.

下面我们用逆序配方法证明 Jacoby 定理.

Jacoby 定理　对于二次型(1)，若 A 的主子式

$$|A_1|=a_{11}\neq 0,\ |A_2|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,\ \cdots,\ |A_k|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}\neq 0,\ \cdots,\ |A|\neq 0$$

则存在一个单位上三角变换，可将其化成：

$$f=|A_1|z_1^2+\frac{|A_2|}{|A_1|}z_2^2+\cdots+\frac{|A|}{|A_{n-1}|}z_n^2 \tag{16}$$

证　对二次型(1) 作变换(2)，由定理 1 及定理 2 可得：

$$f=Y'_{n-1}A_{n-1}Y_{n-1}+\frac{|A|}{|A_{n-1}|}y_n^2 \tag{17}$$

这就将 n 个变元的二次型作了第一次配方将其降为(y_1，y_2，…，y_{n-1}) 的 $n-1$ 个变量的二次型. 如果将变换(2) 写成矩阵形式，则有：

$$X=C_1Y \tag{18}$$

其中 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，而 C_1 为：

$$C_1=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&\tau_1^{(1)}\\0&1&0&\cdots&0&\tau_2^{(1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&\tau_{n-1}^{(1)}\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

其中 $\tau_1^{(1)}=\tau_1$，$\tau_2^{(1)}=\tau_2$，…，$\tau_{n-1}^{(1)}=\tau_{n-1}$. 对 $Y'_{n-1}A_{n-1}Y_{n-1}$ 再应用定理 1 及定理 2 进行变换，其变换矩阵为

$$\left.\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&\tau_1^{(2)}\\0&1&0&\cdots&0&\tau_2^{(2)}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&\tau_{n-2}^{(2)}\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\right\}n-1\text{ 阶}$$

将其单位地扩充成 n 阶矩阵 C_2：

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \tau_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \tau_2^{(2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

依次类推，当完成整个配方时，其变换矩阵为：

$$C = C_1 C_2 \cdots C_{n-2} C_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_1^{(n-1)} & \tau_1^{(n-2)} & \cdots & \tau_1^{(2)} & \tau_1^{(1)} \\ 0 & 1 & \tau_2^{(n-2)} & \cdots & \tau_2^{(2)} & \tau_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \tau_{n-1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中C_k的第$n-k+1$列元素为$(\tau_1^{(k)}, \tau_2^{(k)}, \cdots, \tau_{n-k}^{(k)}, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{k-1})'$. 其余全是由相应单位矩阵的列向量组成. 由 $\tau_i^{(k)}(i = 1,2,\cdots,n-k)$ 构成的 $T^{(k)} = (\tau_1^{(k)}, \tau_2^{(k)}, \cdots, \tau_{n-k}^{(k)})'$ 满足以下方程：

$$A_{n-k}T^{(k)} + B_{n-k} = 0$$

其中 $B_{n-k} = (a_{1,n-k+1}, a_{2,n-k+1}, \cdots, a_{n-k,n-k+1})'$, $A_{n-k} = (a_{ij})_{(n-k)\times(n-k)}$.

由(20)式构成的矩阵 C 显然是单位上三角阵.

综上，对(1)式直接作变换：

$$X = CZ \tag{21}$$

其中 $Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)'$，则(1)即可变换成

$$X'AX = |A_1| z_1^2 + \frac{|A_2|}{|A_1|} z_2^2 + \cdots + \frac{|A|}{|A_{n-1}|} z_n^2$$

参考文献：

[1] 北京大学几何与代数教研室. 高等代数[M]. 第三版. 北京：高等教育出版社，2003.

[2] 卜长江，罗跃生. 矩阵论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2003.

A Method of Completing the Square with Reverse Order and Its Application

QIAN Wei-wei[1]， CAI Yao-zhi[2]

1. College of Pharmaceutical Sciences, Zhejiang Chinese Medical University, Hangzhou 310053, China;

2. Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

Abstract: A new method of completing the square with reverse order is presented by change quadric form into standard form. Using this new method, the authors give the formula of the area of a general elliptic curve and the volume of a general ellipsoid. At last, a new proof for Jacoby theorem is provided.

Key words: method of completing the square; quadric form; standard form; Jacoby theorem

责任编辑 覃吉康