第 33 卷　第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 6 月
Vol. 33　No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2008

文章编号：1000-5471(2008)03-0034-03

关于广义棱连通度的一个注记①

雷　澜，　李霄民

重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067

摘要： 将广义棱 $\alpha(G)$ 的定义推广到 $m+1$ 个同构图的情形，定义了图 $\alpha^m(G)$，得到广义棱 $\alpha^m(G)$ 的点连通度和边连通度的几个性质.

关　键　词： 广义棱；最小度；边连通度；连通度

中图分类号： O157.5　　　　**文献标识码：** A

近年来，由实际问题归结而来的广义棱的问题，已经引起了众多图论研究者的注意[1-4]. 文献[1] 定义了由一个连通图 G 在置换 α 上生成的广义棱柱 $\alpha(G)$，该广义棱柱由原图 G 和与 G 同构的另一个图 G_y 生成，即 $\alpha(G)$ 共含有两个与 G 同构的图. 而在 G 的顶点和 G_y 的顶点之间的边由置换 α 决定，这些边加上原图 G 和 G_y 的边，就是广义棱柱 $\alpha(G)$ 的边. 文献[3,4] 研究了该广义棱的点连通度 $\kappa(G)$、边连通度 $\kappa'(G)$、染色等问题. 文献[2] 在文献[1] 的结果上，又通过引入广义棱的子图的边连通度和点连通度的上界值 $\bar{\kappa}(G)$，$\bar{\kappa}'(G)$，研究了图所代表的网络的抗攻击性和安全性. 本文在文献[1] 的基础上，推广广义棱的定义，讨论推广的广义棱的连通度的若干性质，而这些性质与广义棱定义中的置换的取法无关. 接着研究该广义棱所代表的网络的安全，最后进一步把研究结果推广到原图为路的情况.

设 G_0 是一个有 n 个顶点的图，记 G_0 的顶点为 $V(G_0)=\{v_1^0, v_2^0, \cdots, v_n^0\}$. 设映射 $f_i: G_0 \longrightarrow G_i$ 为从 G_0 到 G_i 的任意一个同构映射，即 G_i 是与 G_0 同构的连通图，$V(G_i)=\{v_1^i, v_2^i, \cdots, v_n^i\}$，$1\leqslant i\leqslant m$，$G_i$ 中的每一个顶点 v_k^i 为 v_j^0 的象($1\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$). 定义 G_0 与 G_i 间的边集为 E_i，即若 $f_i: v_j^0 \xrightarrow{i} v_k^i$，则边 $v_j^0 v_k^i \in E_i$. 此即设 X 是图 $K_{1,m}$，将 X 的顶点标注为 $u_0, u_1, \cdots, u_m$，其中 $d(u_0)=m$，$d(u_i)=1$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. 将图 X 的顶点 u_0 用图 G 来替换，顶点 u_i 用与 G 同构的图 G_i 来替换. 也就是说，对给定的原图 G，以及在 S_n 中的任意一个映射 $f_i: G_0 \longrightarrow G_i$，我们定义的广义棱如果用符号 $\alpha^m(G)$ 来标记，则它的顶点集为 $V(\alpha^m(G))=\bigcup\limits_{i=0}^{m} V(G_i)$. 该广义棱 $\alpha^m(G)$ 的边集为所有 G_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的边与由映射 f_i 产生的边集之和，故 $E(\alpha^m(G))=\left(\bigcup\limits_{i=0}^{m} E(G_i)\right)\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i\right)$. 广义棱 $\alpha^m(G)$ 如图 1 所示.

为研究广义棱 $\alpha^m(G)$ 的连通度，我们引入符号 $U(G)$. 设 S 为图 G 的一个点割，$|V(C)|$ 为 $G-S$ 的非空分支 C 的顶点个数. 记 $U(G)=\min\{|S|+|V(C)|\}$，即 $U(G)$ 表示对 G 的所有点割 S 及 $G-S$ 的所有非空分支的点数之和取最小值.

---

① 收稿日期：2007-09-04
基金项目：重庆市自然科学基金资助项目 CQCSTC(NO. 2007BA2004)；重庆市教委资助项目(KJ07010).
作者简介：雷　澜(1973-)，女，重庆人，硕士，主要从事图论及其应用研究.

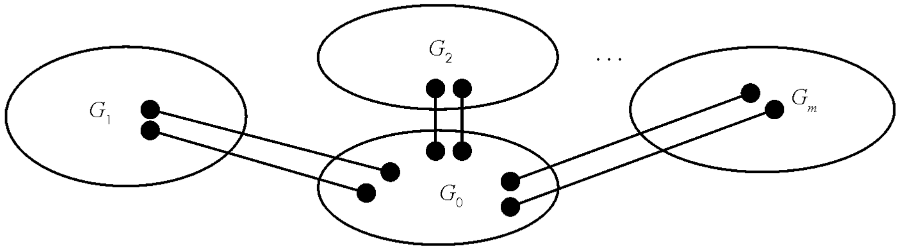

图 1　广义棱 $\alpha^m(G)$

引理 1　$U(G) \leqslant \delta(G)+1 \leqslant |V(G)|$.

证　因为从图 G 中去掉任意顶点的邻域，则该图不连通或得平凡图. 故结论成立.

引理 2[1]　如果 G 是一个有 n 个顶点的连通图，则 $U(G)=\delta(G)+1$.

定理 1　$\min\{(m+1)\kappa(G), U(G)\} \leqslant \kappa(\alpha^m(G)) \leqslant U(G)$.

证　根据 $U(G)$ 的定义，由于 G_1，G_2，…，G_m 是与 G_0 同构的图，我们假定 S 是 G 的一个点割，记 C 为 $G-S$ 得到的图中满足 $U(G)=\min\{|S|+|V(C)|\}$ 的那个连通分支. 类似地，记 S_i 是 G_i 的点割集，$0 \leqslant i \leqslant m$，$C_i$ 是 G_i-S_i 中点数最少的连通分支，满足 $U(G_i)=\min\{|S|+|V(C_i)|\}$. 在广义棱 $\alpha^m(G)$ 中，按 $\alpha^m(G)$ 的定义，由于 G 与 G_i 同构，故 $U(G)=U(G_i)$. 因为 C_i 中的顶点通过 S_i 和映射 f_i 下的象点与图 $\alpha^m(G)$ 的其余部分相连通，所以

$$\kappa(\alpha^m(G)) \leqslant |S_i|+|V(C_i)|=U(G_i)=U(G)$$

设 $S \subset V(\alpha^m(G))$，且 S 为 $\alpha^m(G)$ 的一个点割集. 记 $S_i=S \cap V(G_i)$，$0 \leqslant i \leqslant m$. 显然，某些 S_i 可能为空集. 注意到 $|S|=\sum\limits_{i=0}^{m}|S_i|$，我们进一步考虑图 $\alpha^m(G)-S$ 的结构，证明将分下面 4 种情况.

情况 1　假设存在某一个图，G_i-S_i 或者 G_j-S_j（$i \neq j$）中有一个是空图. 不失一般性，可设 G_j-S_j 是空图. 则 $S_j=V(G_j)$. 此时，显然有 $|S| \geqslant |S_j|=|V_j| \geqslant U(G)$.

情况 2　假设 G_0-S_0 和 G_j-S_j（$j=1,2,\cdots,m$）都是连通的. 因为 S 是 $\alpha^m(G)$ 的一个点割，所以存在 k（$1 \leqslant k \leqslant m$），使在 $\alpha^m(G)$ 中，G_0-S_0 的点和 G_k-S_k 的点之间没有边. 即在 G_k-S_k 中的每一个点 u_k，它的原象 u_k 一定在 S_0 中. 此即 $|S_0| \geqslant |V(G_j-S_j)|$. 所以

$$|S| \geqslant |S_0|+|S_j| \geqslant |S_j|+|V(G_j-S_j)| \geqslant U(G)$$

情况 3　假设所有的 G_i-S_i（$0 \leqslant i \leqslant m$）都不连通，则每一个点集 S_0，S_1，…，S_m 都是原图 G 的点割. 此时 $|S|=\sum\limits_{i=0}^{m}|S_i| \geqslant (m+1)\kappa(G)$.

情况 4　假设 G_i-S_i（$1 \leqslant i \leqslant m$）和 G_0-S_0 中任意有一个是连通的，另外一个是不连通的. 不妨设 G_i-S_i 是不连通的，则对 G_i-S_i 中的某个连通分支 C_x，如果有点 $u_x \in C_x$，而 u_x 的象 $u^0_{\alpha(i)} \in G_0-S_0$，则 $\alpha^m(G)-S$ 将会是连通的，从而推出矛盾. 故 u_x 的象 $u^j_{\alpha(i)} \in S_0$. 故有 $|S_0| \geqslant |V(C_x)|$. 即

$$|S| \geqslant |S_i|+|V(C_x)| \geqslant U(G)$$

综上，$\alpha^m(G)$ 已经被证明至少为 $(m+1)\kappa(G)$ 或者为 $U(G)$，故 $\kappa(\alpha^m(G)) \geqslant \min\{(m+1)\kappa(G), U(G)\}$.

由引理 2、定理 1 及文献[2]，引入符号 $\bar{\kappa}(G)$. 我们定义 $\bar{\kappa}(G)=\max\{\kappa(H) \mid$ 其中 H 为 G 的子图$\}$. 类似地，定义 $\bar{\delta}(G)=\max\{\delta(H)\}$. 我们有下面的定理 2.

定理 2　若 G 是一个连通图，则

$$\min\{(m+1)\kappa(G), \delta(G)+1\} \leqslant \kappa(\alpha^m(G)) \leqslant \bar{\kappa}(\alpha^m(G)) \leqslant \bar{\delta}(G)+1$$

证　要证明定理 2，只需要证明 $\bar{\kappa}(\alpha^m(G)) \leqslant \bar{\delta}(G)+1$.

设 G_1，G_2，…，G_m 是与 G_0 同构的图. 令 H 是广义棱 $\alpha^m(G)$ 的一个满足 $\bar{\kappa}(\alpha^m(G))=\kappa(H)$ 的子图，记 $H_i=H \cap G_i$，$0 \leqslant i \leqslant m$. 如果所有的 H_i 都为一个平凡点，那么 $H \cong K_{1,m}$. 此时我们一定有 $G=K_1$，且

$\alpha^m(G) = K_{1,m}$. 在这种情况下，结论显然成立.

否则，设 u 是子图 H 中顶点度数最小的那个点，即 $\delta(H) = d(u)$，不失一般性，设 $u \in V(H_k)$，则有 $d(u) \leqslant \delta(H_k) + 1$. 故有

$$\kappa(\alpha^m(G)) = \kappa(H) \leqslant \delta(H) \leqslant \delta(H_k) + 1 \leqslant \bar{\delta}(G) + 1$$

故定理 2 得证.

本定理充分说明广义棱所构成的网络具有较强的抗攻击性，该网络的安全性可获得充分的保障.

若 G 是一个有 n 个顶点的连通图，顶点标记为 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. P 是一条路，P 的顶点依次标记为 u_0，u_1，…，u_m. 则将 P 的顶点 u_0 用 G 替换，u_1，u_2，…，u_m 依次用与 G 同构的图 G_1，G_2，…，G_m 来替换. 其中 G_i 与 G_{i+1} 之间的边由置换 α 决定，即若记 G_i 与 G_{i+1} 之间的边集为 E_i，则

$$E_i = \{v_j^i v_k^{i+1} \mid v_j^i \in V(G_i),\ v_k^{i+1} \in V(G_{i+1})\}$$

对如此构成的广义棱，我们有以下推论. 其证明与定理 1 和定理 2 类似.

推论 1 $\min\{(m+1)\kappa(G),\ U(G)\} \leqslant \kappa(\alpha^m(G)) \leqslant U(G)$.

推论 2 $\min\{(m+1)\kappa(G),\ \delta(G)+1\} \leqslant \kappa(\alpha^m(G)) \leqslant \bar{\kappa}(\alpha^m(G)) \leqslant \bar{\delta}(G) + 1$.

参考文献：

[1] Piazza B L, Ringeisen R D. Connectivity of Generalized Prisms Vver G [J]. Discrete Appl Math, 1991, 30: 229-223.

[2] Lai H J. Note Large Survivable Nets and the Generalized Prisms [J]. Discrete Appl Math, 1995, 61: 181-185.

[3] Ringeisen R D. On cycle Permutation Graphs [J]. Discrete Math, 1984, 51: 265-275.

[4] Balbuena C, Marcote X, Garcia-Vázquez P. On Restricted Connectivities of Permutation Graphs [J]. Published online in Wiley InterScience, 2005, 45: 113-118.

[5] 李霄民. 判定超欧拉图的一个新方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 41-43.

[6] 曲晓英, 赵海红. 三连通半无爪图的点泛圈性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2006, 31(2): 26-29.

A Note on the Connectivity of Generalized Prisms

LEI Lan, LI Xiao-min

Mathmatics and Statistics College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: The definition of the prism here is popularized to $m+1$ copies, which is denoted by $\alpha^m(G)$. The some properties of vertex-connectivity and the edge-connectivity of $\alpha^m(G)$ have been studied in the note.

Key words: prism; minimum degree; edge-connectivity; connectivity

责任编辑 覃吉康