第 33 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 6 月
Vol. 33 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun. 2008

文章编号: 1000-5471(2008)03-0030-04

一类 $R(G)=-2$ 图簇的补图的色性探讨[①]

王守中，　江　蓉

茂名学院 理学院，广东 茂名 525000

摘要: 研究图的色唯一性问题是图论的一个重要内容，利用图 G 的伴随多项式的末项的特点，探讨了一类 n 个点 $n+1$ 条边且 $R(G)=-2$ 的不可约图补图的色唯一性的问题，证明了：设 $|V(B_2)|=n(\geqslant 7)$，若 B_2 是不可约的且 $n\neq 8$，则 $\overline{B_2}$ 是色唯一的.

关　键　词: 色多项式；伴随多项式；色唯一图

中图分类号: O157.5　　　　**文献标识码:** A

本文仅考虑简单图，用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的点集和边集，用 $\overline{G}$ 表示 G 的补图，用 $P(G,\lambda)$ 表示图 G 的色多项式. 称图 G 是色唯一的，如果对任意图 H，若 $P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$，则 $H\cong G$. 称一个图 G 是伴随唯一的，若从 $h(H,x)=h(G,x)$ 可推出 $H\cong G$. 从色多项式和伴随多项式的定义可知：若图 H 和 G 是伴随等价的，则 $\overline{G}$ 与 $\overline{H}$ 是色等价的. 图 G 是色唯一的当且仅当 $\overline{G}$ 是伴随唯一的[1]. 关于伴随多项式的基本知识可参见文献[2]. 本文中 P_n，C_n 分别表示 n 个顶点的路和圈，D_n 表示一个三角形粘接 P_{n-2} 的一个一度点所得到的图，F_n 表示 P_{n-4} 的两个一度点分别粘接一个三角形所得到的图. 其它未解释的术语和记号参见文献[3].

文献[4]中将点数为 n、边数为 $n+1$(即图中含有两个圈)且 $R(G)=-2$ 的连通图合称为 N 类图，并根据它们的伴随多项式的第四项系数 b_3 的大小，将 N 类图分为如下图簇：N_0，N_1，N_2，N_3，N_4.

$$N_0=\{\Gamma_1,\Gamma_1^*,\Gamma_2,\Gamma_2^*,\Gamma_3,\Gamma_4\}$$
$$N_1=\{A_1,A_2,A_3(r_1,r_2),A_4(r,s),A_5\}$$
$$N_2=\{B_1,B_2,B_3,B_4(r,s,t),B_5(l_1,l_2)\}$$
$$N_3=\{C_1(r,s),C_2\};\ N_4=\{D\}$$

本文将讨论 N_2 类图簇中的子图簇 B_2 的补图的色性.

命题 1　设 $|V(B_4(r,s,t))|=n\ (n\geqslant 11)$ 是偶数，则：

(i) 当 r,s,t 均为偶数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$；

(ii) 当 r 是偶数，s,t 均为奇数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$；

(iii) 当 s 是偶数，r,t 均为奇数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $\left(\frac{r+t+2}{2}\cdot\frac{s}{2}+\frac{r+1}{2}\cdot\frac{t+1}{2}\right)x^{\frac{n}{2}}$；

(iv) 当 t 是偶数，r,s 均为奇数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$.

证　由文献[1]的定理 3，有

① 收稿日期: 2007-09-14
基金项目: 茂名学院科研基金资助课题(203171).
作者简介: 王守中(1965-)，男，河南镇平人，副教授，主要从事图论的研究.

$$h(B_4(r,s,t))=h(F_{r+t+3})h(P_{s-1})+xh(D_{r+1})h(D_{t+1})h(P_{s-2})$$

由于 n 是偶数且 $n=r+s+t+2$，故 $r+s+t$ 也是偶数. 所以 r,s,t 满足以下情形之一：

1）r,s,t 均为偶数；

2）r 是偶数，s,t 均为奇数；

3）s 是偶数，r,t 均为奇数；

4）t 是偶数，r,s 均为奇数.

下面分情形证明.

情形 1　r,s,t 均为偶数.

此时 $r+t+3$ 为奇数，$s-1$ 为奇数，$r+1$ 为奇数，$t+1$ 为奇数，$s-2$ 为偶数. 由文献[5]的引理 4 知：$h(F_{r+t+3})$ 的末项为 $\frac{r+t+2}{2}x^{\frac{r+t+2}{2}}$，$h(P_{s-1})$ 的末项为 $\frac{s}{2}x^{\frac{s}{2}}$，故 $h(F_{r+t+3})h(P_{s-1})$ 的末项为

$$\frac{r+t+2}{2}\,\frac{s}{2}x^{\frac{r+s+t+2}{2}}=\frac{r+t+2}{2}\,\frac{s}{2}x^{\frac{n}{2}}$$

而 $h(D_{r+1})$ 的末项为 $x^{\frac{r}{2}}$，$h(D_{t+1})$ 的末项为 $x^{\frac{t}{2}}$，$h(P_{s-2})$ 的末项为 $x^{\frac{s-2}{2}}$，所以 $xh(D_{r+1})h(D_{t+1})h(P_{s-2})$ 的末项为

$$xx^{\frac{r}{2}}x^{\frac{t}{2}}x^{\frac{s-2}{2}}=x^{\frac{r+s+t}{2}}=x^{\frac{n-2}{2}}$$

由上面的讨论可知：$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$.

情形 2　r 是偶数，s,t 均为奇数.

此时 $r+t+3$ 为偶数，$s-1$ 为偶数，$r+1$ 为奇数，$t+1$ 为偶数，$s-2$ 为奇数.

由文献[5]的引理 4 知：$h(F_{r+t+3})$ 的末项为 $x^{\frac{r+t+1}{2}}$，$h(P_{s-1})$ 的末项为 $x^{\frac{s-1}{2}}$，故 $h(F_{r+t+3})h(P_{s-1})$ 的末项为 $x^{\frac{r+t+1}{2}}x^{\frac{s-1}{2}}=x^{\frac{r+s+t}{2}}=x^{\frac{n-2}{2}}$. 而 $h(D_{r+1})$ 的末项为 $x^{\frac{r}{2}}$，$h(D_{t+1})$ 的末项为 $\frac{t+1}{2}x^{\frac{t+1}{2}}$，$h(P_{s-2})$ 的末项为 $\frac{s-1}{2}x^{\frac{s-1}{2}}$，所以 $xh(D_{r+1})h(D_{t+1})h(P_{s-2})$ 的末项为

$$xx^{\frac{r}{2}}\,\frac{t+1}{2}x^{\frac{t+1}{2}}\,\frac{s-1}{2}x^{\frac{s-1}{2}}=\frac{t+1}{2}\cdot\frac{s-1}{2}\cdot x^{\frac{r+s+t+2}{2}}=\frac{t+1}{2}\cdot\frac{s-1}{2}\cdot x^{\frac{n}{2}}$$

故 $h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$.

情形 3　s 是偶数，r,t 均为奇数.

此时 $r+t+3$ 为奇数，$s-1$ 为奇数，$r+1$ 为偶数，$t+1$ 为偶数，$s-2$ 为偶数. 由文献[5]的引理 4 知：$h(F_{r+t+3})$ 的末项为 $\frac{r+t+2}{2}x^{\frac{r+t+2}{2}}$，$h(P_{s-1})$ 的末项为 $\frac{s}{2}x^{\frac{s}{2}}$，故 $h(F_{r+t+3})h(P_{s-1})$ 的末项为

$$\frac{r+t+2}{2}\,\frac{s}{2}x^{\frac{r+s+t+2}{2}}=\frac{r+t+2}{2}\,\frac{s}{2}x^{\frac{n}{2}}$$

而 $h(D_{r+1})$ 的末项为 $\frac{r+1}{2}x^{\frac{r+1}{2}}$，$h(D_{t+1})$ 的末项为 $\frac{t+1}{2}x^{\frac{t+1}{2}}$，$h(P_{s-2})$ 的末项为 $x^{\frac{s-2}{2}}$，$xh(D_{r+1})h(D_{t+1})h(P_{s-2})$ 的末项为

$$\frac{r+1}{2}\,\frac{t+1}{2}xx^{\frac{r+1}{2}}x^{\frac{t+1}{2}}x^{\frac{s-2}{2}}=\frac{r+1}{2}\,\frac{t+1}{2}x^{\frac{r+s+t+2}{2}}=\frac{r+1}{2}\,\frac{t+1}{2}x^{\frac{n}{2}}$$

故 $h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $\frac{r+t+2}{2}\,\frac{s}{2}x^{\frac{n}{2}}+\frac{r+1}{2}\,\frac{t+1}{2}x^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{r+t+2}{2}\,\frac{s}{2}+\frac{r+1}{2}\,\frac{t+1}{2}\right)x^{\frac{n}{2}}$.

情形 4　t 是偶数，r,s 均为奇数.

此时 $r+t+3$ 为偶数，$s-1$ 为偶数，$r+1$ 为偶数，$t+1$ 为奇数，$s-2$ 为奇数. 由文献[5]的引理 4 知：$h(F_{r+t+3})$ 的末项为 $x^{\frac{r+t+1}{2}}$，$h(P_{s-1})$ 的末项为 $x^{\frac{s-1}{2}}$，故 $h(F_{r+t+3})h(P_{s-1})$ 的末项为 $x^{\frac{r+t+1}{2}}x^{\frac{s-1}{2}}=x^{\frac{r+s+t}{2}}=x^{\frac{n-2}{2}}$. 而 $h(D_{r+1})$ 的末项为 $\frac{r+1}{2}x^{\frac{r+1}{2}}$，$h(D_{t+1})$ 的末项为 $x^{\frac{t}{2}}$，$h(P_{s-2})$ 的末项为 $\frac{s-1}{2}x^{\frac{s-1}{2}}$，所以

$xh(D_{r+1})h(D_{t+1})h(P_{s-2})$ 的末项为

$$\frac{r+1}{2}\,\frac{s-1}{2}x^{\frac{r+s+t+2}{2}}=\frac{r+1}{2}\,\frac{s-1}{2}x^{\frac{n}{2}}$$

从而 $h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$.

命题 2 设 $|V(B_2)|=|V(B_4(r,s,t))|=n\ (\geqslant 11)$，若 n 是偶数，则 B_2 与 $B_4(r,s,t)$ 不伴随等价.

证 由文献[1] 的定理 3 有

$$h(B_2)=h(D_n)+h(P_3)h(P_{n-4})$$
$$h(B_4(r,s,t))=h(F_{r+t+3})h(P_{s-1})+xh(D_{r+1})h(D_{t+1})h(P_{s-2})$$

由文献[5] 的引理 4 易知：当 n 是偶数时，$h(B_2)$ 的末项为 $\left(\frac{n}{2}+2\right)x^{\frac{n}{2}}$，由命题 1 知：若 n 是偶数，则

(i) 当 r,s,t 均为偶数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$；

(ii) 当 r 是偶数，s,t 均为奇数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$；

(iii) 当 s 是偶数，r,t 均为奇数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $\left(\frac{r+t+2}{2}\cdot\frac{s}{2}+\frac{r+1}{2}\cdot\frac{t+1}{2}\right)x^{\frac{n}{2}}$；

(iv) 当 t 是偶数，r,s 均为奇数时，$h(B_4(r,s,t))$ 的末项为 $x^{\frac{n-2}{2}}$.

反证法：如果 $h(B_2)=h(B_4(r,s,t))$，比较二者的末项，则只可能是 s 是偶数，r,t 均为奇数. 此时

$$\left(\frac{n}{2}+2\right)x^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{r+t+2}{2}\cdot\frac{s}{2}+\frac{r+1}{2}\cdot\frac{t+1}{2}\right)x^{\frac{n}{2}}$$

即

$$\frac{n}{2}+2=\frac{r+t+2}{2}\cdot\frac{s}{2}+\frac{r+1}{2}\cdot\frac{t+1}{2} \tag{1}$$

化简可得

$$2n+8=rs+ts+rt+2s+r+t+1$$

由已知

$$n=r+s+t+2$$

带入(1) 式并化简有

$$2(r+t)+12=(r+t)(s+1)+(rt+1)$$

故

$$(r+t)(s-1)=11-rt \tag{2}$$

由于 $r\geqslant 3$，$s\geqslant 3$，$t\geqslant 3$，所以 $11-rt\leqslant 2$. 而 $r+t\geqslant 6$，$s-1\geqslant 2$，$(r+t)(s-1)\geqslant 12$，因此(2) 式不成立，故 $h(B_2)\neq h(B_4(r,s,t))$. 即 B_2 与 $B_4(r,s,t)$ 不伴随等价.

定理 1 设 $|V(B_2)|=n\ (\geqslant 11)$，若 B_2 不可约且 n 是偶数，则 $\overline{B_2}$ 是色唯一的.

证 只需证 B_2 是伴随唯一的. 设存在图 H，使得 $h(B_2)=h(H)$. 由于 B_2 不可约，故 H 只能是形如 $rK_1\cup G$ (G 是连通图) 的图. 由于 $R(B_2)=-2$，$q(B_2)=n+1$，$b_3(B_2)=r_N+2n+8$，因此由文献[6] 的定理 1、文献[6] 的定理 10、文献[4] 的引理 4、文献[7] 的引理 3.1 和 3.2 知

$$R(G)=-2\qquad q(G)=n+1\qquad b_3(G)=r_N+2n+8$$

由文献[4] 的引理 5 知：当 $n\geqslant 10$ 时，$b_3(\Gamma_1)=b_3(\Gamma_1^*)<b_3(B_2)$；$b_3(\Gamma_4)<b_3(B_2)$，故 G 只能是 N_2 类中的图且 $|V(G)|=n$，则 $r=0$. 即 $H=G$. 由文献[4] 的命题 1,5,7 及本文的命题 2 即可证明 $G\cong B_2$，即 $H\cong B_2$. 因此 B_2 是伴随唯一的. 即 $\overline{B_2}$ 是色唯一的.

文献[4] 曾得到如下结论：

定理 设 $|V(B_2)|=n\ (\geqslant 6)$，若 B_2 是不可约的且 n 是奇数，则 $\overline{B_2}$ 是色唯一的.

结合本文中的定理 1 和文献[4] 中的定理，我们可以得到如下

定理 2 设 $|V(B_2)|=n\ (\geqslant 7)$，若 B_2 是不可约的且 $n\neq 8$，则 $\overline{B_2}$ 是色唯一的.

显然定理 2 推广了文献[4]中定理的结果.

参考文献：

[1] 刘儒英. 图的伴随多项式 [J]. 青海师范大学学报(自然科学版)，1990，(3)：1－7.

[2] 刘儒英，李念祖. 一类 $K_n-E(G)$ 型图的色唯一性 [J]. 数学物理学报，1994，14(3)：316－320.

[3] Bondy J A，Murty U S R. Graph Theory with Applications [M]. Amsterdam：North-Holland by the Universities Press，1976：1－17.

[4] 江　蓉. 几类 $G=(p,\ p+1)$ 且 $R(G)=-2$ 图簇的补图的色性 [J]. 青海师范大学学报(自然科学版)，1999，55(3)：8－14.

[5] 刘儒英. 两类新的色唯一图簇 [J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，1996，27(1)：11－17.

[6] Liu Ruying. Adjoint Polynomials and Chromatically Unique Graphs [J]. Discrete Math，1997，172：85－92.

[7] 郭知熠，李永洁. 关于圈并的补图的色唯一性 [J]. 武汉城市建设学院学报，1989，1(6)：1－9.

[8] 江　蓉，王守中，陈荣斯. 非正则的完全广义四角系统 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2006，31(2)：19－22.

[9] 汪元伦，任秋道. 圈的定向距离图的阶 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2005，28(1)：63－65.

[10] 任海珍，刘儒英. 图族伴随多项式最小根的刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2006，31(3)：15－18.

The Discussion of the Chromatic Uniqueness of the Complement of a Class of Graph with $R(G)=-2$

WANG Shou-zhong，　JIANG　Rong

School of Sciences，Maoming University，Maoming Guangdong 525000，China

Abstract：Researching chromatic uniqueness of a graph is an important part of graph theory. By utilizing the characteristics of the last term of adjoint polynomial of graph G，to discuss the chromatic uniqueness of the complement of a class of graph which is irreducible，where $G=(n,\ n+1)$ and $R(G)=-2$. One can Prove：Let $|V(B_2)|=n\ (\geqslant 7)$，if B_2 is irreducible and $n\neq 8$，then $\overline{B_2}$ is chromatically unique.

Key words：chromatic polynomial；adjoint polynomial；chromatically unique graphs

责任编辑　覃吉康