文章编号：1000-5471(2008)03-0024-06

一个 Hilbert 型奇异重积分算子的范数①

洪 勇

广东商学院 数学与计算科学系，广州 510320

摘要：引入带参数的 Hilbert 型奇异重积分算子 T_λ：

$$(T_\lambda f)(y)=\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x \qquad y\in R_+^n$$

其中 $\|x\|_\alpha=(x_1^\alpha+\cdots+x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha>0)$. 研究了 T_λ 的一种有界性问题并求出其范数. 作为应用，还研究其涉及内积的等价形式.

关 键 词：Hilbert 型奇异重积分算子；范数；内积；Holder 不等式；Hilbert 型不等式

中图分类号：O178 **文献标识码：A**

1 预备知识

设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\lambda>2-\min\{p,q\}$，$f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，使得

$$0<\int_0^{+\infty}t^{(p-1)(2-\lambda)-1}f^p(t)\mathrm{d}t<+\infty \qquad 0<\int_0^{+\infty}t^{(q-1)(2-\lambda)-1}g^q(t)\mathrm{d}t<+\infty$$

文献[1]得到如下的 Hilbert 型不等式：

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{\max\{x^\lambda,\ y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&<\frac{\lambda pq}{(p+\lambda-2)(q+\lambda-2)}\times\left(\int_0^{+\infty}t^{(p-1)(2-\lambda)-1}f^p(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}t^{(q-1)(2-\lambda)-1}g^q(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}y^{p+\lambda-3}\left(\frac{f(x)}{\max\{x^\lambda,\ y^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\\&<\left[\frac{\lambda pq}{(p+\lambda-2)(q+\lambda-2)}\right]^p\times\int_0^{+\infty}t^{(p-1)(2-\lambda)-1}f^p(t)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2}$$

(1),(2) 中的常数因子都是最佳的. 当 $\lambda=1$ 时，(1) 与(2) 成为著名的 Hilbert 类不等式[2]. Hilbert 不等式在调和分析等分析学科中有重要应用，是基础的重要不等式. 近年来，Hilbert 算子及相关不等式的研究已取得许多有价值的成果[3-9].

本文将引入一个带参数的 Hilbert 型奇异重积分算子，并讨论其范数问题. 作为应用，导出其等价式及一些相关不等式.

设 $\lambda>0$，定义如下的一种 Hilbert 型奇异重积分算子 T_λ：

$$(T_\lambda f)(y)=\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x \qquad y\in R_+^n\tag{3}$$

① 收稿日期：2007-06-29
基金项目：广东省高校自然科学研究重点资助项目(05Z026)；广东省自然科学基金资助项目(06301003).
作者简介：洪 勇(1959-)，男，云南昭通人，教授，主要从事调和分析和实分析的研究.

其中 $R_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1>0,\cdots,x_n>0\}$，$\|x\|_\alpha=(x_1^\alpha+\cdots+x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha>0)$. 对非负可测函数 $\omega(x)$ 及 $p>1$，定义函数集：

$$L_\omega^p(R_+^n)=\left\{f(x)\geqslant 0\,\middle|\,\|f\|_{p,\omega}=\left(\int_{R_+^n}f^p(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}$$

引理 1[10]　设 $p_i>0$，$a_i>0$，$\alpha_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\psi(u)$ 可测，那么

$$\int\cdots\int_{x_1>0,\cdots,x_n>0;\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leqslant 1}\psi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)\times x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1\cdots\alpha_n\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int_0^1\psi(u)u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\mathrm{d}u \tag{4}$$

其中 $\Gamma(t)$ 表示 Γ-函数.

引理 2　设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\alpha>0$，$\lambda>\max\{n(2-p),\ n(2-q)\}$，则

$$\omega_n(\lambda,\alpha,p,x)=\int_{R_+^n}\frac{1}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ \|y\|_\alpha^\lambda\}}\|y\|_\alpha^{\frac{\lambda-2n}{p}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\|x\|_\alpha^{n-\lambda+\frac{\lambda-2n}{p}}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]} \tag{5}$$

证　由引理 1，并注意到由 $\lambda>\max\{n(2-p),\ n(2-q)\}$ 可得 $\lambda>0$，且

$$\frac{n(p-2)+\lambda}{\lambda p}>0$$
$$\frac{n(p-2)+\lambda}{\lambda p}-1<0$$

于是有

$$\omega_n(\lambda,\alpha,p,x)$$
$$=\lim_{r\to+\infty}\int\cdots\int_{y_1>0,\cdots y_n>0;\ y_1^\alpha+\cdots+y_n^\alpha<r^\alpha}\frac{\left[r\left(\left(\frac{y_1}{r}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{y_n}{r}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\lambda-2n}{p}}}{\max\left\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ \left[r\left(\left(\frac{y_1}{r}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{y_n}{r}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^\lambda\right\}}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$
$$=\lim_{r\to+\infty}\frac{r^n\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^n\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\int_0^1\frac{(ru^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{\lambda-2n}{p}}}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ (ru^{\frac{1}{\alpha}})^\lambda\}}u^{\frac{n}{\alpha}-1}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ t^\lambda\}}t^{n-1+\frac{\lambda-2n}{p}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\|x\|_\alpha^{n-\lambda+\frac{\lambda-2n}{p}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\max\{1,\ u\}}u^{\frac{n(p-2)+\lambda}{\lambda p}-1}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\|x\|_\alpha^{n-\lambda+\frac{\lambda-2n}{p}}\left(\frac{\lambda p}{\lambda+n(p-2)}-\frac{\lambda p}{\lambda+n(p-2)-\lambda p}\right)$$

$$=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\|x\|_\alpha^{n-\lambda+\frac{\lambda-2n}{p}}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}$$

引理 3 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\alpha>0$，$\lambda>\max\{n(2-p), n(2-q)\}$，$\varepsilon$ 是充分小的正数，则

$$\begin{aligned}&\int_{R_+^n}\frac{1}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y_\alpha^\lambda\|\}}\|x\|_\alpha^{\frac{(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon}{p}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\|y\|_\alpha^{\frac{n-\lambda[(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon]}{p}}\times\\&\left[\frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon}-\frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\lambda p-\varepsilon}\right]\end{aligned}\tag{6}$$

证 根据引理 1，用类似于引理 2 的证明方法可证.

2 主要定理及证明

定理 1 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\alpha>0$，$\lambda>\max\{n(2-p), n(2-q)\}$，$\omega(x)=\|x\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}$，$\omega_1(x)=\|x\|_\alpha^{(p-1)(2n-\lambda)-n}$，则 Hilbert 型奇异重积分算子 T_λ 是 $L_{\omega_1}^p(R_+^n)$ 到 $L_\omega^p(R_+^n)$ 的有界线性算子，且 T_λ 的范数

$$\begin{aligned}\|T_\lambda\|&=\sup_{f\in L_{\omega_1}^p(R_+^n)}\frac{\|T_\lambda f\|_{p,\omega}}{\|f\|_{p,\omega_1}}\\&=\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\end{aligned}\tag{7}$$

证 记

$$g(y)=\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\qquad y\in R_+^n$$

由 Holder 不等式，对 $f\in L_{\omega_1}^p(R_+^n)$，有

$$\begin{aligned}\|T_\lambda f\|_{p,\omega}^p&=\int_{R_+^n}\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\\&=\int_{R_+^n}\int_{R_+^n}\frac{f(x)g(y)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{R_+^n}\int_{R_+^n}\left[f(x)\frac{\|x\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)}{q^2}}}{\|y\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)}{p^2}}}\right]\left[g(y)\frac{\|y\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)}{p^2}}}{\|x\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)}{q^2}}}\right]\frac{1}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\left[\int_{R_+^n}\int_{R_+^n}\frac{f^p(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\frac{\|x\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)p}{q^2}}}{\|y\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)}{p}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}}\times\\&\quad\left[\int_{R_+^n}\int_{R_+^n}\frac{g^q(y)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\frac{\|y\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)q}{p^2}}}{\|x\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)}{q}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\int_{R_+^n}\omega_n(\lambda, \alpha, p, x)\|x\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)p}{q^2}}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\times\\&\quad\left(\int_{R_+^n}\omega_n(\lambda, \alpha, q, y)\|y\|_\alpha^{\frac{(2n-\lambda)q}{p^2}}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

又由引理 2，得到

$$\|T_\lambda f\|_{p,\omega}^{p} \leqslant \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} \frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\|f\|_{p,\omega_1} \times \left(\int_{R_+^n}\|y\|_\alpha^{(q-1)(2n-\lambda)-n} g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} \frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\|f\|_{p,\omega_1}\|T_\lambda f\|_{p,\omega}^{p-1}$$

从而有

$$\|T_\lambda f\|_{p,\omega} \leqslant \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} \frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\|f\|_{p,\omega_1}$$

故 T_λ 是 $L_{\omega_1}^p(R_+^n)$ 到 $L_\omega^p(R_+^n)$ 的有界线性算子.

若(7)式不成立，则存在常数 $K < \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} \frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}$，使 $\|T_\lambda\| \leqslant K$. 于是

$$\int_{R_+^n}\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y \leqslant K^p\int_{R_+^n}\|x\|_\alpha^{(p-1)(2n-\lambda)-n} f^p(x)\mathrm{d}x$$

用 $\|x\|_\alpha > \delta$ 表示 $\{x \in R_+^n \mid \|x\|_\alpha > \delta\}$，由上式，有

$$\lim_{\delta\to 0^+}\Big[\int_{\|y\|_\alpha>\delta}\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y - K^p\int_{\|x\|_\alpha>\delta}\|x\|_\alpha^{(p-1)(2n-\lambda)-n} f^p(x)\mathrm{d}x\Big] \leqslant 0 \tag{8}$$

对充分小的 $\varepsilon > 0$，取 $f(x) = \|x\|_\alpha^{\frac{(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon}{p}}$，有

$$\int_{\|x\|_\alpha>\delta}\|x\|_\alpha^{(p-1)(2n-\lambda)-n} f^p(x)\mathrm{d}x = \int_{\|x\|_\alpha>\delta}\|x\|_\alpha^{-n-\varepsilon}\mathrm{d}x \tag{9}$$

又由引理 3，有

$$\begin{aligned}&\int_{\|y\|_\alpha>\delta}\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y \\ =&\int_{\|y\|_\alpha>\delta}\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{\|x\|_\alpha^{\frac{(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon}{p}}}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda, \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y \\ =&\left\{\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\left[\frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon} - \frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\lambda p-\varepsilon}\right]\right\}^p \times \\ &\int_{\|x\|_\alpha>\delta}\|x\|_\alpha^{-n-\varepsilon}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10}$$

由(8)、(9)、(10)及 $\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\|x\|_\alpha>\delta}\|x\|_\alpha^{-n-\varepsilon}\mathrm{d}x = +\infty$，可得

$$\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\left[\frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\varepsilon} - \frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\lambda p-\varepsilon}\right] \leqslant K$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，有

$$\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\left[\frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)}-\frac{p}{np+(p-1)(\lambda-2n)-\lambda p}\right]\leqslant K$$

由此得到

$$\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\leqslant K$$

这是一个矛盾，从而(7)式成立.

3 等价形式

对非负可测函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，定义 f 与 g 的内积为：

$$(f,g)=\int_{R_+^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

推论 1 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\alpha>0$，$\lambda>\max\{n(2-p),n(2-q)\}$，$\omega_1(x)=\|x\|_\alpha^{(p-1)(2n-\lambda)-n}$，$\omega_2(x)=\|x\|_\alpha^{(q-1)(2n-\lambda)-n}$，$f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，则 Hilbert 型奇异重积分算子 T_λ 满足：

$$(T_\lambda f,g)\leqslant\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\|f\|_{p,\omega_1}\|g\|_{p,\omega_2}\tag{11}$$

其中的常数因子$\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}$是最佳的.

证 设 $\omega(x)=\|x\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}$，由 Holder 不等式及定理 1，有

$$\begin{aligned}(T_\lambda f,g)&=\int_{R_+^n}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{R_+^n}\left(\|y\|_\alpha^{\frac{(q-1)(2n-\lambda)-n}{q}}\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)\left(\|y\|_\alpha^{\frac{(q-1)(2n-\lambda)-n}{q}}g(y)\right)\mathrm{d}y\\&\leqslant\left[\int_{R_+^n}\|y\|_\alpha^{\lambda+n(p-3)}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_{R_+^n}\|y\|_\alpha^{(q-1)(2n-\lambda)-n}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\|T_\lambda f\|_{p,\omega}\|g\|_{p,\omega_2}\leqslant\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\|f\|_{p,\omega_1}\|g\|_{p,\omega_2}\end{aligned}$$

故(11)式成立.

我们也可容易地由(11)导出：

$$\|T_\lambda f\|_{p,\omega}\leqslant\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\lambda pq}{[\lambda+n(p-2)][\lambda+n(q-2)]}\|f\|_{p,\omega_1}\tag{12}$$

故(11)与(12)等价，从而由定理 1 知，(11)中的常数因子是最佳的.

推论 2 设 $\alpha>0$，$f(x)\geqslant 0$，$g(y)\geqslant 0$，则

$$\int_{R_+^n}\left(\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^n,\|y\|_\alpha^n\}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\leqslant\frac{4\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{n\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\int_{R_+^n}f^2(x)\mathrm{d}x\tag{13}$$

$$\int_{R_+^n}\int_{R_+^n}\frac{f(x)g(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^n,\ \|y\|_\alpha^n\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{4\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{n\alpha^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\left(\int_{R_+^n}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_+^n}g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\tag{14}$$

证 分别在(7) 和(11) 中取 $\lambda=n$，$p=q=2$ 即可得到(13) 和(14).

注 在(7) 和(11) 中取 $n=1$，可得(2) 和(1). 若适当地取参数 λ,α 等的其他值，可得到若干新的 Hilbert 型积分不等式.

参考文献：

[1] 杨必成. 一个 Hilbert 类不等式的最佳推广 [J]. 吉林大学学报(自然科学版)，2004，42(1)：30－34.
[2] Hardy G H，Littlewood J E，Polya G，Inequalities [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1952.
[3] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 济南：山东科学技术出版社，2004.
[4] 胡 克. 关于 Hardy-Littlewood-Polya 不等式 [J]. 数学物理学报，2000，20：684－687.
[5] 杨必成. 关于 Hardy-Hilbert 类不等式及其等价式的推广 [J]. 数学杂志，2004，24(1)：24－30.
[6] 洪 勇. 一个新的 Hilbert 重积分不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(4)：594－599.
[7] Yang Bicheng. On the Norm of an Integral Operator and Application [J]. J Math Anal Appl，2006，321(1)：182－192.
[8] 洪 勇. 关于 Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. 数学学报，2001，44(4)：619－626.
[9] 钟五一，杨必成. 关于反向 Hardy-Hilbert 积分不等式的推广 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(4)：44－48.
[10] 菲赫金戈尔茨. 微积分学教程 [M]. 吴亲仁，路见可，译. 北京：人民教育出版社，1957：407－423.

On the Norm of a Hilbert's Type Singular Multiple Integral Operator

HONG Yong

Department of Mathematics and Computer Science，Guangdong Business College，Guangzhou 510320，China

Abstract：Defining a Hilbert type singular multiple integal operator with parameters T_λ：

$$(T_\lambda f)(y)=\int_{R_+^n}\frac{f(x)}{\max\{\|x\|_\alpha^\lambda,\ \|y\|_\alpha^\lambda\}}\mathrm{d}x\qquad y\in R_+^n$$

where $\|x\|_\alpha=(x_1^\alpha+\cdots+x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ $(\alpha>0)$. In this paper，the boundedness and norm of T_λ are studied. As their applications，the equivalent froms with inner product are obtained.

Key words：Hilbert's type singular multiple integral operator；norm；inner product；Holder's inequality；Hilbert's type inequality

责任编辑 覃吉康