

# $L$ -拓扑空间的 $O_s$ - $\delta$ 连通性<sup>①</sup>

王 延 军

延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000

**摘要:** 在  $L$ -拓扑空间中借助于  $\delta$ -闭包定义了  $O_s$ - $\delta$  隔离子集, 又结合  $X$  上的常值  $L$ -集  $C_s$  进一步引入了  $O_s$ - $\delta$  连通集与  $O_s$ - $\delta$  连通空间的概念. 讨论了它们的若干等价刻画及其性质. 最后, 给出了  $O_s$ - $\delta$  连通分支的定义, 并研究了其基本性质.

**关键词:**  $L$ -拓扑空间;  $\delta$ -闭包;  $O_s$ - $\delta$  隔离;  $O_s$ - $\delta$  连通

**中图分类号:** O189.1

**文献标识码:** A

连通性是一般拓扑学中最重要概念之一, 国内外许多学者以诸多不同的形式把它推广到  $L$ -拓扑空间中<sup>[1-6]</sup>. 本文主要在文[1,3]的基础上, 借助于  $\delta$ -闭包给出  $O_s$ - $\delta$  连通性, 并研究其若干性质.

在本文中,  $L$  总表示一个  $F$  格, 即具有逆序对合对应的完全分配格,  $L^X$  表示非空普通集  $X$  上的  $L$ -集全体.  $M(L)$  和  $M^*(L^X)$  分别表示  $L$  和  $L^X$  中的分支之集. 设偶对  $(X, \omega)$  为  $L$ -拓扑空间(简记为  $L$ -ts),  $A^-$ ,  $A^\circ$  与  $A'$  分别表示  $A \in L^X$  的闭包, 内部和伪补. 称  $A$  为正则开(正则闭)集, 若  $A = A^-$  ( $A = A^\circ$ ),  $(X, \omega)$  中全体正则开集之族记为  $RO(L^X)$ ,  $(X, \omega)$  中全体正则闭集之族记为  $RC(L^X)$ . 其余未加说明的概念与符号均参见文献[1-6].

**定义 1** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}$ ,  $A, B \in L^X$ , 如果  $A_\delta^- \wedge B \leq C_s$  且  $A \wedge B_\delta^- \leq C_s$ , 则称  $A, B$  为  $O_s$ - $\delta$  隔离的, 其中  $C_s$  表示  $X$  上的取常值  $s$  的  $L$ -集.

**定义 2** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}$ ,  $D \in L^X$ , 如果不存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $D = G \vee H$ ,  $G \not\leq C_s$ ,  $H \not\leq C_s$  且  $D_\delta^- \wedge G \wedge H \leq C_s$ , 则称  $D$  为  $O_s$ - $\delta$  连通集. 特别当最大  $L$ -集  $1_X$  是  $O_s$ - $\delta$  连通集时, 称  $(X, \omega)$  为  $O_s$ - $\delta$  连通空间.

**定理 1** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}$ , 则下列条件等价:

- (1)  $(X, \omega)$  不是  $O_s$ - $\delta$  连通空间;
- (2) 在  $(X, \omega)$  中存在  $\delta$ -闭集  $A, B$ , 使得  $A \vee B = 1_X$ ,  $A \wedge B \leq C_s$ ,  $A \not\leq C_s$ ,  $B \not\leq C_s$ ;
- (3) 在  $(X, \omega)$  中存在  $\delta$ -开集  $D, E$ , 使得  $D \vee E = 1_X$ ,  $D \wedge E \leq C_s$ ,  $D \not\leq C_s$ ,  $E \not\leq C_s$ .

**证** “(1) $\implies$ (2)” 设  $(X, \omega)$  不是  $O_s$ - $\delta$  连通空间, 则存在  $A, B \in L^X$ , 使得  $A \vee B = 1_X$ ,  $A \not\leq C_s$ ,  $B \not\leq C_s$ ,  $A_\delta^- \wedge B \leq C_s$ ,  $A \wedge B_\delta^- \leq C_s$ . 而

$$A_\delta^- = A_\delta^- \wedge (A \vee B) = (A_\delta^- \wedge A) \vee (A_\delta^- \wedge B) \leq A \vee C_s = A$$

$$B_\delta^- = B_\delta^- \wedge (A \vee B) = (B_\delta^- \wedge A) \vee (B_\delta^- \wedge B) \leq B \vee C_s = B$$

即  $A, B$  是  $\delta$ -闭集,  $A \wedge B \leq A_\delta^- \wedge B \leq C_s$ .

① 收稿日期: 2007-09-04

基金项目: 陕西省教育厅专项基金资助项目(06JK152); 延安大学重点科研资助项目(yd2006-48).

作者简介: 王延军(1977-), 男, 陕西宜川人, 讲师, 硕士. 主要从事格上拓扑学的研究.

“(2) $\implies$ (1)” 证明是基本的,从略.

“(2) $\implies$ (3)” 设在  $(X, \omega)$  中存在  $\delta$ -闭集  $A, B$ , 且  $A \vee B = 1_X, A \wedge B \leq C_s, A \not\leq C_s, B \not\leq C_s$ , 则对  $\forall s, s_1 \in L - \{1\}$ , 有

$$\begin{aligned} A' \wedge B' &= (A \vee B)' = 0_X \leq C_s \\ A' \vee B' &= (A \wedge B)' \not\leq (C_s)' = C_{s_1} \end{aligned}$$

且  $A' \vee B' = 1_X, A' \not\leq C_s, B' \not\leq C_s, A'$  是  $\delta$ -开集,  $B'$  是  $\delta$ -开集. 令  $A' = D, B' = E$ , 则(3) 成立.

“(3) $\implies$ (2)” 证明是直接的,从略.

**定理 2** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}, D \in L^X, D$  是  $O_s$ - $\delta$  连通集当且仅当不存在  $O_s$ - $\delta$  隔离的  $L$ -集  $A, B$ , 使得  $D = A \vee B, A \not\leq C_s, B \not\leq C_s$ .

**证** 必要性 如果不存在  $A, B \in \omega$ , 使得  $D = A \vee B, A \not\leq C_s, B \not\leq C_s$ , 且  $D_\delta^- \wedge A \wedge B \leq C_s$ , 由于  $A_\delta^- \wedge B \leq D_\delta^- \wedge A \wedge B \leq C_s, A \wedge B_\delta^- \leq D_\delta^- \wedge A \wedge B \leq C_s$ , 故不存在  $O_s$ - $\delta$  隔离的  $L$ -集  $A, B$ , 使得  $D = A \vee B, A \not\leq C_s, B \not\leq C_s$ .

充分性 如果不存在  $O_s$ - $\delta$  隔离的  $L$ -集  $A, B$ , 使得  $D = A \vee B, A \not\leq C_s, B \not\leq C_s$ , 由于

$$A_\delta^- \wedge B \leq C_s \quad B_\delta^- \wedge A \leq C_s$$

所以

$$\begin{aligned} D_\delta^- \wedge A \wedge B &= (A_\delta^- \vee B_\delta^-) \wedge A \wedge B \\ &\leq (A_\delta^- \wedge B) \vee (B_\delta^- \wedge A) \leq C_s \end{aligned}$$

即不存在  $A, B \in \omega$ , 使得  $D = A \vee B, A \not\leq C_s, B \not\leq C_s, D_\delta^- \wedge A \wedge B \leq C_s$ . 由定义 2 知  $D$  为  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**定理 3** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}, A \in L^X$  是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 如果  $A \leq B \leq A_\delta^-$ , 则  $B$  也是  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**证** 假设  $B$  不是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 则存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $B = G \vee H, G \not\leq C_s, H \not\leq C_s$  且  $G_\delta^- \wedge H \leq C_s, G \wedge H_\delta^- \leq C_s$ . 令  $E = G \wedge A, F = H \wedge A$ , 则

$$\begin{aligned} E \vee F &= (G \wedge A) \vee (H \wedge A) \\ &= (G \vee H) \wedge A = B \wedge A = A \quad E \not\leq C_s, F \not\leq C_s \\ E_\delta^- \wedge F &= (G \wedge A)_\delta^- \wedge F \leq (G \vee A)_\delta^- \wedge F \\ &= (G_\delta^- \vee A_\delta^-) \wedge F = (G_\delta^- \wedge F) \vee (A_\delta^- \wedge F) \\ &= (G_\delta^- \wedge H \wedge A) \vee (A_\delta^- \wedge H \wedge A) \\ &\leq G_\delta^- \wedge H \wedge A \leq C_s \end{aligned}$$

同理可得  $E \wedge F_\delta^- \leq C_s$ , 则  $A$  不是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 矛盾! 故  $B$  是  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**推论 1** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}, A \in L^X$  是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 则  $A_\delta^-$  也是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**定理 4** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}, A, B \in L^X$ , 若  $A, B$  都是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集, 且  $A, B$  不是  $O_s$ - $\delta$  隔离的, 则  $A \vee B$  也是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**证** 假设  $A \vee B$  不是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集, 则存在  $G, H \in \omega$ , 使得,  $G \not\leq C_s, H \not\leq C_s$ , 且

$$\begin{aligned} A \vee B &= G \vee H \\ (A \vee B)_\delta^- \wedge G \wedge H &\leq C_s \end{aligned}$$

即

$$(A_\delta^- \vee B_\delta^-) \wedge G \wedge H = (A_\delta^- \wedge G \wedge H) \vee (B_\delta^- \wedge G \wedge H) \leq C_s$$

设  $G = E \vee F, H = M \vee N$ , 则

$$A \vee B = G \vee H = (E \vee M) \vee (F \vee N)$$

不妨设  $A = E \vee M$ , 则  $B = F \vee N, E, F \not\leq C_s, M, N \not\leq C_s$ , 于是

$$A_\delta^- \wedge E \wedge M \leq A_\delta^- \wedge G \wedge H \leq C_s$$

这说明  $A$  不是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 矛盾!

**定理 5** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}$ ,  $\{A_i\}_{i \in I}$  是  $(X, \omega)$  中的一族  $O_s$ - $\delta$  连通集, 且  $\forall i, j \in I, A_i$  与  $A_j$  在  $(X, \omega)$  中不是  $O_s$ - $\delta$  隔离的, 则  $\bigvee_{i \in I} A_i$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**证** 令  $A = \bigvee_{i \in I} A_i$ . 假设存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $A = G \vee H, G \not\leq C_s, H \not\leq C_s, G_\delta^- \wedge H \leq C_s$  且  $G \wedge H_\delta^- \leq C_s$ .  $\forall t \in I$ , 令  $G_t = A_t \wedge G, H_t = A_t \wedge H$ , 则

$$\begin{aligned} A_t &= G_t \vee H_t \\ (G_t)_\delta^- \wedge H_t &\leq G_\delta^- \wedge H \leq C_s \\ G_t \wedge (H_t)_\delta^- &\leq G \wedge H_\delta^- \leq C_s \end{aligned}$$

由于  $A_t$  是  $O_s$ - $\delta$  连通的, 故  $G_t = 0_X$  或  $H_t = 0_X$ , 从而  $A_t = H_t \leq H$  或  $A_t = G_t \leq G$ . 因此  $A_s = H_s \leq H$  或  $A_s = G_s \leq G$ . 不妨设  $A_s = H_s \leq H$ , 则  $\forall t \in I - \{s\}, A_t \leq H$ . 事实上, 若  $A_t \not\leq H$ , 则  $A_t \leq G$ , 从而

$$\begin{aligned} A_t \wedge (A_s)_\delta^- &= A_t \wedge (H_s)_\delta^- \leq G \wedge H_\delta^- \leq C_s, \\ (A_t)_\delta^- \wedge A_s &= (A_t)_\delta^- \wedge H_s \leq G_\delta^- \wedge H \leq C_s \end{aligned}$$

这与  $A_t$  和  $A_s$  不是  $O_s$ - $\delta$  隔离的相矛盾! 于是  $\forall t \in I, A_t \leq H$ , 由此  $A \leq H$ . 因而

$$G = A \wedge G \leq H \wedge G \leq H_\delta^- \wedge G \leq C_s$$

于是  $A$  是  $O_s$ - $\delta$  连通集.

**定理 6** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s_1, s_2 \in L - \{1\}$ , 且  $s_1 \leq s_2$ . 如果  $D$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_{s_2}$ - $\delta$  连通集, 则  $D$  也是  $O_{s_1}$ - $\delta$  连通集.

**证** 假设  $D$  不是  $O_{s_1}$ - $\delta$  连通集, 则存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $G \not\leq C_{s_1}, H \not\leq C_{s_1}, G \vee H = D, G_\delta^- \wedge H \leq C_{s_1}, G \wedge H_\delta^- \leq C_{s_1}$ . 由于  $s_1 \leq s_2$ , 则  $C_{s_1} \leq C_{s_2}$ , 从而

$$\begin{aligned} G &\not\leq C_{s_2} \\ H &\not\leq C_{s_2} \\ D &= G \vee H \\ G_\delta^- \wedge H &\leq C_{s_2} \\ G \wedge H_\delta^- &\leq C_{s_2} \end{aligned}$$

即  $D$  不是  $O_{s_2}$ - $\delta$  连通集, 与已知矛盾!

**定理 7** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $D \in L^X, s \in L - \{1\}$ , 则下列条件等价:

- (1)  $D$  在  $(X, \omega)$  中是  $O_s$ - $\delta$  连通集;
- (2)  $D$  在  $(D_0, \omega | D_0)$  中是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 其中  $D_0 = \{x \in X \mid D(x) > 0\}$ ,  $\omega | D_0$  为子空间拓扑;
- (3) 不存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $D = G \vee H, G \leq C_s, H \leq C_s$ , 且  $D \wedge G$  和  $D \wedge H$  在  $(X, \omega)$  中均是  $O_s$ - $\delta$  隔离的.

**证** “(1) $\implies$ (2)” 假设存在  $E, F \in \omega | D_0$ , 使得  $E \not\leq C_s, F \not\leq C_s, D = E \vee F$  且

$$D_\delta^- \wedge E \wedge F \leq C_s$$

即  $D$  在  $(D_0, \omega | D_0)$  中不是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 则存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $E = D_0 \wedge G, F = D_0 \wedge H$ . 从而,  $G \not\leq C_s, H \not\leq C_s$ , 且

$$\begin{aligned} D &= E \vee F = (D_0 \wedge G) \vee (D_0 \wedge H) = D_0 \wedge (G \vee H) = G \vee H \\ D_\delta^- \wedge E \wedge F &= D_\delta^- \wedge D_0 \wedge G \wedge H = D_\delta^- \wedge G \wedge H \leq C_s \end{aligned}$$

即  $D$  在  $(X, \omega)$  中不是  $O_s$ - $\delta$  连通集, 矛盾!

“(2) $\implies$ (3)” 设存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $D = G \vee H, G \not\leq C_s, H \not\leq C_s$ , 且  $D \wedge G$  和  $D \wedge H$  在  $(X, \omega)$  中是  $O_s$ - $\delta$  隔离的, 即

$$\begin{aligned} (D \wedge G)_\delta^- \wedge (D \wedge H) &= G_\delta^- \wedge D \wedge H \leq C_s \\ (D \wedge G) \wedge (D \wedge H)_\delta^- &= D \wedge G \wedge H_\delta^- \leq C_s \end{aligned}$$

从而  $G_\delta^- \wedge H \leq C_s, G \wedge H_\delta^- \leq C_s$ . 令  $M = D_0 \wedge G, N = D_0 \wedge H$ , 则  $M \not\leq C_s, N \not\leq C_s$ , 且

$$\begin{aligned}
D &= M \vee N = (D_0 \wedge G) \vee (D_0 \wedge H) = G \vee H \\
D_\delta^- \wedge M \wedge N &= (G_\delta^- \vee H_\delta^-) \wedge M \wedge N \\
&= (G_\delta^- \wedge M \wedge N) \vee (H_\delta^- \wedge M \wedge N) \\
&= (G_\delta^- \wedge D_0 \wedge G \wedge H) \vee (H_\delta^- \wedge D_0 \wedge G \wedge H) \\
&\leq (G_\delta^- \wedge H) \vee (H_\delta^- \wedge G) \leq C_s
\end{aligned}$$

即  $D$  在  $(D_0, \omega | D_0)$  中不是  $O_s - \delta$  连通集, 与(2) 矛盾!

“(3) $\implies$ (1)” 设不存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $D = G \vee H$ ,  $G \not\leq C_s$ ,  $H \not\leq C_s$ , 且  $D \wedge G$  和  $D \wedge H$  在  $(X, \omega)$  中是  $O_s - \delta$  隔离的, 则

$$\begin{aligned}
(D \wedge G)_\delta^- \wedge (D \wedge H) &\leq C_s \\
(D \wedge G) \wedge (D \wedge H)_\delta^- &\leq C_s
\end{aligned}$$

由于  $G = D \wedge G$ ,  $H = D \wedge H$ , 即  $G_\delta^- \wedge D \wedge H \leq C_s$ ,  $D \wedge G \wedge H_\delta^- \leq C_s$ , 从而

$$G_\delta^- \wedge H \leq C_s, \quad G \wedge H_\delta^- \leq C_s$$

即  $G, H$  是  $O_s - \delta$  隔离的, 于是  $D$  是  $O_s - \delta$  连通集.

**定理 8** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s = 0 \in L$ ,  $D \in L^X$ , 则下列条件等价:

- (1)  $D$  在  $(X, \omega)$  中是  $O_s - \delta$  连通集;
- (2) 不存在  $G, H \in \omega$ , 使得  $D = G \vee H$ ,  $G \neq 0_X$ ,  $H \neq 0_X$ ,  $D_\delta^- \wedge G \wedge H = 0_X$ ;
- (3) 不存在  $A, B \in \omega | D_0$ , 使得  $D = A \vee B$ ,  $A \neq 0_X$ ,  $B \neq 0_X$ ,  $D_\delta^- \wedge A \wedge B = 0_X$ ;
- (4)  $D$  不是  $(X, \omega)$  中两个非空  $O_s - \delta$  隔离集之并;
- (5)  $D$  在  $(X, \omega)$  中是  $\delta$ -连通集.

**证** (1), (2), (3) 的等价性由定理 7 直接可得.

“(4) $\implies$ (1)” 由定理 7 的(3) 可证.

“(1) $\implies$ (4)” 假设  $D$  是  $(X, \omega)$  中两个非空  $O_s - \delta$  隔离集之并, 则  $D = A \vee B$ ,  $A \neq 0_X$ ,  $B \neq 0_X$ ,  $A_\delta^- \wedge B = 0_X$ ,  $A \wedge B_\delta^- = 0_X$ , 从而  $0_X \leq A \wedge B \leq A_\delta^- \wedge B = 0_X$ , 即  $A \wedge B = 0_X$ . 于是

$$\begin{aligned}
D_\delta^- \wedge A \wedge B &= (A_\delta^- \vee B_\delta^-) \wedge A \wedge B \\
&= (A_\delta^- \wedge A \wedge B) \vee (B_\delta^- \wedge A \wedge B) = A \wedge B = 0_X
\end{aligned}$$

从而  $D$  在  $(X, \omega)$  中不是  $O_s - \delta$  连通集, 与(1) 矛盾!

“(2) $\implies$ (5)” 设(2) 成立, 则

$$\begin{aligned}
D_\delta^- \wedge G \wedge H &= (G_\delta^- \vee H_\delta^-) \wedge G \wedge H \\
&= (G_\delta^- \wedge G \wedge H) \vee (H_\delta^- \wedge G \wedge H) \\
&= (G_\delta^- \wedge H) \vee (H_\delta^- \wedge G) = 0_X
\end{aligned}$$

从而  $G_\delta^- \wedge H = 0_X$ ,  $H_\delta^- \wedge G = 0_X$ . 由文献[3] 中的  $\delta$ -连通集的定义知  $D$  在  $(X, \omega)$  中是  $\delta$ -连通集.

“(5) $\implies$ (1) $\implies$ (2)” 由定义 2 及文献[3] 中的定义 6 可得.

**定义 3** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}$ ,  $A \in L^X$  是极大  $O_s - \delta$  连通集, 即若  $B \in L^X$  是  $O_s - \delta$  连通集, 且  $A \leq B$ , 就有  $A = B$ , 则称  $A$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s - \delta$  连通分支.

**定理 9** 设  $(X, \omega)$  是  $L$ -ts,  $s \in L - \{1\}$ , 则下列命题成立:

- (1)  $(X, \omega)$  中所有  $O_s - \delta$  连通分支的并等于  $1_X$ ;
- (2) 设  $A$  与  $B$  是  $(X, \omega)$  中两个不同的  $O_s - \delta$  连通分支, 则  $A \wedge B \leq C_s$ ;
- (3) 若  $A$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s - \delta$  连通分支, 则  $A$  是  $\delta$ -闭集.

**证** (1)  $\forall x_\lambda \in M^*(L^X)$ , 下面分两种情况讨论:

(i) 若  $x_\lambda \leq C_s$ , 并假设  $x_\lambda$  不是  $(X, \omega)$  中的  $O_s - \delta$  连通集, 则存在  $G, H \in L^X$ , 使得  $x_\lambda = G \vee H$ ,  $G \not\leq C_s$ ,  $H \not\leq C_s$ ,  $G_\delta^- \wedge H \leq C_s$ ,  $G \wedge H_\delta^- \leq C_s$ , 而  $x_\lambda$  是  $M^*(L^X)$  中的任一分支, 故  $x_\lambda = G \leq C_s$  或  $x_\lambda = H$

$\leq C_s$ , 矛盾!

(ii) 若  $x_\lambda \not\leq C_s$ , 由于  $x_\lambda \in M^*(L^X)$ , 所以  $x_\lambda$  只能表示成两个 LF 点之并, 即  $x_\lambda = x_\alpha \vee x_\beta$ , 但  $x_\alpha$  与  $x_\beta$  不是  $O_s$ - $\delta$  隔离的. 事实上, 若  $x_\alpha \not\leq C_s$ ,  $x_\beta \not\leq C_s$ , 则  $x_\alpha \wedge x_\beta \not\leq C_s$ , 与  $O_s$ - $\delta$  隔离矛盾!

令  $\Gamma(x_\lambda) = \{D \in L^X \mid x_\lambda \leq D, D \text{ 是 } (X, \omega) \text{ 中的 } O_s\text{-}\delta \text{ 连通集}\}$ ,  $\Omega(x_\lambda) = \bigvee \Gamma(x_\lambda)$ , 则由定理 5 可知  $\Omega(x_\lambda)$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集且是极大  $O_s$ - $\delta$  连通集. 事实上, 若  $\Omega(x_\lambda)$  不是极大  $O_s$ - $\delta$  连通集, 则存在  $M \in L^X$ ,  $M$  为  $O_s$ - $\delta$  连通集且  $\Omega(x_\lambda) \leq M$ , 而  $M \leq \Omega(x_\lambda)$ , 故  $M = \Omega(x_\lambda)$ . 于是  $\Omega(x_\lambda)$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通分支. 由于  $L^X$  中所有分支之并等于  $1_X$ , 从而  $(X, \omega)$  中所有  $O_s$ - $\delta$  连通分支的并等于  $1_X$ .

(2) 设  $A, B$  是  $(X, \omega)$  中两个不同的  $O_s$ - $\delta$  连通分支, 若  $A \wedge B \not\leq C_s$ , 则由定理 5 可知  $A \vee B$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通分支, 这与  $A, B$  为  $O_s$ - $\delta$  连通分支相矛盾!

(3) 设  $A$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通分支, 则由推论 1 可知  $A_\delta^-$  是  $(X, \omega)$  中的  $O_s$ - $\delta$  连通集, 且  $A \leq A_\delta^-$ , 从而由定义 3 知  $A = A_\delta^-$ , 即  $A$  是  $\delta$ -闭集.

### 参考文献:

- [1] 张杰, 王秀英.  $L$ -Fuzzy 拓扑空间的  $O_s$ -连通性 [J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(1): 31-34.
- [2] 程吉树.  $\delta$ -连续序同态的若干性质 [J]. 模糊系统与数学, 1997, 11(4): 38-41.
- [3] 杨海龙, 李生刚.  $L$ -拓扑空间的  $\delta$ -连通性 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2006, 19(3): 189-192.
- [4] LI Shenggang. Connectedness in  $L$ -fuzzy Topological Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 116: 361-368.
- [5] 汪贤华.  $\delta$ -连通空间 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2004, 20(3): 243-247.
- [6] 王国俊.  $L$ -Fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.
- [7] 陈波, 刘建军.  $L$ -闭包空间的 Lindeloff 可数性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(6): 43-45.
- [8] 史红波. 局部凸空间中凸幂集凝聚算子的不动点定理及其应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(9): 1-4.
- [9] 王磊, 丁协平. 拓扑空间的广义  $R$ -KKM 定理及其应用 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(4): 405-408.
- [10] 何蓉华. 拓扑空间中有上下界的广义拟平衡问题 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2007, 30(4): 447-450.

## $O_s$ - $\delta$ Connectedness on $L$ -Topological Spaces

WANG Yan-jun

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China

**Abstract:**  $O_s$ - $\delta$  separated set is defined by means of  $\delta$ -closure,  $O_s$ - $\delta$  connected set and  $O_s$ - $\delta$  connected spaces are introduced furtherly combining constant  $L$ -set  $C_s$  of  $X$ . Their some equivalent characterizations and properties are discussed systematically. Finally, the concept of  $O_s$ - $\delta$  connected component is given, moreover, its basic properties are studied.

**Key words:**  $L$ -topological spaces;  $\delta$ -closure;  $O_s$ - $\delta$  separation;  $O_s$ - $\delta$  connectedness

责任编辑 章吉康