文章编号: 1000-5471(2008)03-0015-04

格序代数二次序共轭的一个注[①]

冯　颖

西南交通大学 数学系, 成都 610031

摘要: 主要讨论了格序代数(f-代数, 殆 f-代数, d-代数)的二次序连续共轭与一次共轭在 Arens 乘积下的乘积空间的序结构问题. 给出了 f-代数二次序连续共轭是半素的 f-代数的一个充分必要条件.

关　键　词: Arens 乘积; f-代数; 殆 f-代数; d-代数; 二次序连续共轭

中图分类号: O177.4　　**文献标识码: A**

有关格序代数的理论是Banach格与正算子理论中非常重要的一部分内容. 文献[1-3]曾讨论过格序代数, 主要是 f-代数, 殆 f-代数, d-代数的二次序连续共轭或二次序共轭在 Arens 乘积下仍然是 f-代数, 殆 f-代数, d-代数的问题. 而本文的主要目的是研究这几类格序代数的二次序(连续)共轭与一次序共轭的乘积空间的序结构, 即是否是序理想的性质. 同时给出了 f-代数的二次序连续共轭是半素的 f-代数的一个充要条件.

定义 1[4]　在 Archimedean Riesz 空间 A 上, 若存在满足结合律的乘法使之成为代数, 并且偏序和乘法是相容的, 即: $\forall x,y \in A^+$, 都有 $xy, yx \in A^+$, 那么 A 被称作一个格序代数或 Riesz 代数. 进一步地, 若 A 是格序代数, 则

(1) A 被称为殆 f-代数, 是指: 当 $\forall x,y \in A$, 且 $x \wedge y = 0$ 时, 有 $xy = 0$;

(2) A 被称为 d-代数, 是指: $\forall x,y \in A$, $z \in A^+$, 都有 $(x \vee y)z = xz \vee yz$, $(x \wedge y)z = xz \wedge yz$ 成立;

(3) A 被称为 f-代数, 是指: 当 $\forall x,y \in A$, $z \in A^+$, 且 $x \wedge y = 0$ 时, 有 $(xz) \wedge y = (zx) \wedge y = 0$ 成立.

由定义不难证明, f-代数一定是殆 f-代数和 d-代数; 但反过来, 殆 f-代数和 d-代数却不一定是 f-代数[4].

对于格序代数 A, 若它的一次序共轭 A' 分离 A 中的点, 即

$$^0(A') = \{x \in A: f(x) = 0, \ \forall f \in A'\} = \{0\}$$

那么 A 可通过一对一的典态映射 σ (σ: $A \longrightarrow A''$, $x \longrightarrow x''$, $x''(f) = f(x)$, $\forall f \in A'$) 置入到二次序共轭 A'' 中. 因此, 在本文的讨论中都假定 $^0(A') = \{0\}$. 关于映射 σ 有如下引理.

引理 1[5]　设 A 是 Riesz 空间, 则映射 σ 的像空间 $\sigma(A) = \{x'': x \in A\}$ 在 A 的二次序连续共轭空间 $(A')'_n$ 中生成的序理想 $I(\sigma(A)) = \{F \in (A')'_n$: 存在 $x \in A^+$, 使得 $|F| \leqslant x''\}$ 是 $(A')'_n$ 的序稠密理想.

可通过 Arens 乘积定义 A'' 中的乘法:

(1) $\forall x \in A$, $f \in A'$, 定义 $f \cdot x$: $A \longrightarrow R$ 为 $(f \cdot x)(y) = f(xy)$, $\forall y \in A$;

① 收稿日期: 2007-10-25
作者简介: 冯　颖(1979-), 女, 四川成都人, 讲师, 博士研究生, 主要从事 Banach 格与正算子理论的研究.

(2) $\forall G \in A''$, $f \in A'$, 定义 $G \cdot f: A \longrightarrow R$ 为$(G \cdot f)(x) = G(f \cdot x)$, $\forall x \in A$;

(3) $\forall F, G \in A''$, 定义 $F \cdot G: A' \longrightarrow R$ 为$(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f)$, $\forall f \in A'$.

在上述定义下有下面主要结果.

引理 2[1-3] 若 A 是殆 f-代数 (d-代数、f-代数), 则 A 的二次序连续共轭$(A')'_n$ 也是殆 f-代数(d-代数、f-代数).

特别地, 上述结论对殆 f-代数、f-代数的二次序共轭 A'' 也成立.

我们将证明, 当 Riesz 空间 A 无论是上述哪一类格序代数时, A 的二次序连续共轭与一次序共轭在 Arens 乘积下的乘积 $(A')'_n \cdot A'$ 不仅是 A' 的子空间而且还是它的序理想.

首先, 讨论 A 是殆 f-代数的情况.

引理 3[3] 设 A 是殆 f-代数, 若 $0 \leqslant f$, $g \in A'$, $0 \leqslant H \in A''$, 满足 $0 \leqslant g \leqslant H \cdot f$, 则存在 $K \in A''$, 满足 $0 \leqslant K \leqslant H$, 使得 $g = K \cdot f$; 而且若 $H \in (A')'_n$, 则 $K \in (A')'_n$.

定理 1 若 A 是殆 f-代数, 则$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序理想.

证 先证$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的线性子空间.

令任意 $f, g \in A'$, $F, G \in (A')'_n$, $h = F \cdot f + G \cdot g$, 则

$$\begin{aligned} 0 \leqslant h^+ &\leqslant |h| \leqslant |F \cdot f + G \cdot g| \\ &\leqslant |F| \cdot |f| + |G| \cdot |g| \leqslant (|F| + |G|)(|f| + |g|) \end{aligned}$$

而 $|F| + |G| \in (A')'_n$, $|f| + |g| \in A'$, 因此由引理 3, 存在 $H_1 \in (A')'_n$, 满足 $0 \leqslant H_1 \leqslant |F| + |G|$, 使得 $h^+ = H_1 \cdot (|f| + |g|)$. 同理可证存在 $H_2 \in (A')'_n$, 满足 $0 \leqslant H_2 \leqslant |F| + |G|$, 使得

$$h^- = H_2 \cdot (|f| + |g|)$$

故

$$h = h^+ - h^- = (H_1 - H_2) \cdot (|f| + |g|) \in (A')'_n \cdot A'$$

因此$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的子空间.

再证$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序理想.

若 $0 \leqslant |h| \leqslant |F \cdot f|$, 其中 $h, f \in A'$, $F \in (A')'_n$, 注意到

$$0 \leqslant h^+ \leqslant |h| \qquad 0 \leqslant h^- \leqslant |h|$$

再由引理 3, 存在 $H_1, H_2 \in (A')'_n$, 使得 $h^+ = H_1 \cdot |f|$, $h^- = H_2 \cdot |f|$, 因此

$$h = h^+ - h^- = (H_1 - H_2) \cdot |f| \in (A')'_n \cdot A'$$

所以$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序理想.

由引理 2 知: 殆 f-代数的二次序共轭 A'' 也是殆 f-代数. 文献[3]已证明: 对任意 $F \in A''$, $G \in (A')'_s$, 都有 $F \cdot G = G \cdot F = 0$, 因此上面定理结论对 $A'' \cdot A'$ 也是适用的.

推论 1 若 A 是殆 f-代数, 则 $A'' \cdot A'$ 也是 A' 的序理想.

证 先证 $A'' \cdot A' = (A')'_n \cdot A'$.

因为$(A')'_n \cdot A' \subset A'' \cdot A'$, 故只需证明 $A'' \cdot A' \subset (A')'_n \cdot A'$. 对任意 $F \in A''$, $f \in A'$, 由于

$$A'' = (A')'_n \oplus (A')'_s$$

所以可令 $F = F_1 + F_2$, 其中 $F_1 \in (A')'_n$, $F_2 \in (A')'_s$. 因此 $F \cdot f = F_1 \cdot f + F_2 \cdot f$. 从而对任意 $x \in A$, 有

$$(F_2 \cdot f)(x) = x''(F_2 \cdot f) = (x'' \cdot F_2)(f)$$

因为 $x'' \cdot F_2 \in A'' \cdot (A')'_s = \{0\}$[3], 故 $x'' \cdot F_2 = 0$, $F_2 \cdot f = 0$. 于是 $F \cdot f = F_1 \cdot f \in (A')'_n \cdot A'$, 由定理 1 可知 $A'' \cdot A'$ 是 A' 的序理想.

由于 f-代数本身也是殆 f-代数, 因此上述定理与推论的结果对 f-代数也是适用的. 而且当 f-代数 A 的二次序共轭空间 A'' 是半素的 f-代数时(等价于$(A')'_n$ 是半素的), $A'' \cdot A' = (A')'_n \cdot A'$ 还是 A' 的序稠密理想, 这也是$(A')'_n$ 半素的一个充分条件.

引理 4[1]　若 A 是 f-代数，则 $(A')'_n$ 半素的充要条件是 A 中的集合

$$J = \{a \in A：存在\ b, c \in A^+，使得\ |a| \leqslant bc\}$$

的零化子空间 $J^0 = \{f \in A'：f(a) = 0，\forall a \in J\}$ 是零空间，即 $J^0 = \{0\}$.

定理 2　若 A 是 f-代数，则 $(A')'_n$ 是半素的 f-代数的充分必要条件是 $(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序稠密理想.

证　先证必要性.

设 $(A')'_n$ 是半素的 f-代数，要证 $(A')'_n \cdot A'$ 是序稠密的，只需说明 $(A')'_n \cdot A'$ 在 A' 中的正交空间 $\{(A')'_n \cdot A'\}^d$ 是一个零空间，即 $\{(A')'_n \cdot A'\}^d = \{0\}$.

对 $\forall 0 \leqslant f \in \{(A')'_n \cdot A'\}^d$，$x \in A$，有 $f \cdot x = \pi'_x(f)$，其中 π'_x 是 A 上的乘积算子 π_x（$\pi_x(y) = yx$，$\forall y \in A$）的共轭算子. 因为 π_x 是 A 上的正交射，因此 π'_x 也是 A' 上正交射. 由于正交射是保带算子，故

$$f \cdot x = \pi'_x(f) \in \{(A')'_n \cdot A'\}^d$$

另一方面，$f \cdot x = x'' \cdot f \in (A')'_n \cdot A'$，所以

$$f \cdot x \in \{(A')'_n \cdot A'\}^d \cap ((A')'_n \cdot A') = \{0\}$$

于是对任意 $y \in A$，$f \cdot x(y) = f(xy) = 0$. 由引理 4，$f \in J^0 = \{0\}$，从而

$$\{(A')'_n \cdot A'\}^d = \{0\}$$

故 $(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序稠密理想.

再证充分性.

设 $(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序稠密理想. 若 $F \in N((A')'_n)$，即 F 是 $(A')'_n$ 的幂零元时，因为 $(A')'_n$ 是 f-代数，所以任意 $G \in (A')'_n$，都有 $F \cdot G = 0$ 成立. 因此，$\forall G \cdot f \in (A')'_n \cdot A'$，有

$$F(G \cdot f) = (F \cdot G)(f) = 0$$

于是当 F 作用于 $(A')'_n \cdot A'$ 上时是零算子. 又因为 $(A')'_n \cdot A'$ 是序稠密的，所以 $\forall 0 \leqslant f \in A'$，存在 $(A')'_n \cdot A'$ 中的网 $\{g_\tau\}_{\tau \in I}$，使得 $0 \leqslant g_\tau \uparrow f$. 考虑到 F 是 A' 上的序连续算子，所以

$$F(g_\tau) \uparrow F(f).\ F(g_\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in I$$

故 $F(f) = 0$. 所以 $F = 0$，因此 $N((A')'_n) = \{0\}$，从而 $(A')'_n$ 是半素的 f-代数.

最后讨论 d-代数的情况.

定理 3　若 A 是 d-代数，则 $(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序理想.

证　先证 $(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 中的实体，即对任意 $h \in A'$，$F \cdot f \in (A')'_n \cdot A'$，若 $0 \leqslant |h| \leqslant |F \cdot f|$，则 $h \in (A')'_n \cdot A'$. 注意 $0 \leqslant h^+ \leqslant |h|$，$0 \leqslant h^- \leqslant |h|$.

首先，若存在 $x \in A^+$，使得 $|F| \leqslant x''$，则 $0 \leqslant h^+ \leqslant x'' \cdot |f|$，$0 \leqslant h^- \leqslant x'' \cdot |f|$. 对任意 $y \in A$，有

$$\begin{aligned}(x'' \cdot |f|)(y) &= x''(|f| \cdot y) = (|f| \cdot y)(x) = |f|(yx) \\ &= |f|(\pi_x(y)) = (\pi'_x(|f|))(y)\end{aligned}$$

其中算子 π_x 与其共轭算子 π'_x 的含义与定理 2 证明中的相同. 因此 $x'' \cdot |f| = \pi'_x(|f|)$. 由于 A 是 d-代数，所以 π_x 是 A 上的格同态，π_x 的共轭算子 π'_x 就是 A' 上的区间保持算子. 而

$$0 \leqslant h^+ \leqslant \pi'_x(|f|) \qquad 0 \leqslant h^- \leqslant \pi'_x(|f|)$$

故一定存在 $h_1, h_2 \in A'$，满足 $0 \leqslant h_1 \leqslant |f|$，$0 \leqslant h_2 \leqslant |f|$，且 $h^+ = \pi'_x(h_1)$，$h^- = \pi'_x(h_2)$，于是

$$h = h^+ - h^- = \pi'_x(h_1 - h_2) = x'' \cdot (h_1 - h_2) \in (A')'_n \cdot A'$$

其次，由引理 1 知 $I(\sigma(A))$ 在 $(A')'_n$ 中序稠密. 所以对任意 $|F| \in (A')'_n$，存在 $I(\sigma(A))$ 中的网 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 满足 $F_\alpha \uparrow |F|$，由 $I(\sigma(A))$ 的定义知：$\forall \alpha \in I$，存在 $x_\alpha \in A^+$，使得 $0 \leqslant F_\alpha \leqslant x''_\alpha$. 由 F_α 与 $|F|$ 的序连续性可知，在 A' 中 $F_\alpha \cdot |f| \uparrow |F| \cdot |f|$. 而 $0 \leqslant h^+ \leqslant |F| \cdot |f|$，$0 \leqslant h^- \leqslant |F| \cdot |f|$，因此必然存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in I$，使得

$$0 \leqslant h^+ \leqslant F_{\alpha_1} \cdot |f|，0 \leqslant h^- \leqslant F_{\alpha_2} \cdot |f|$$

又因为 $F_\alpha \uparrow |F|$，所以一定存在 $\alpha_3 \in I$，使得 $F_{\alpha_1} \vee F_{\alpha_2} \leqslant F_{\alpha_3}$. 于是

$$0 \leqslant h^{+}, h^{-} \leqslant F_{\alpha_3} \cdot |f| \leqslant x''_{\alpha_3} \cdot |f|$$

由前面证明易见，存在 $h_0 \in A'$，使得

$$h = h^{+} - h^{-} = x''_{\alpha_3} \cdot h_0 \in (A')'_n \cdot A'$$

所以$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 中的实体.

关于$(A')'_n \cdot A'$ 线性运算的封闭性，只需注意 $\forall f, g \in A'$，$F, G \in (A')'_n$，都有

$$|F \cdot f + G \cdot g| \leqslant (|F| + |G|) \cdot (|f| + |g|)$$

由上面证明易知 $F \cdot f + G \cdot g \in (A')'_n \cdot A'$.

综上所述，$(A')'_n \cdot A'$ 是 A' 的序理想.

参考文献：

[1] Huijsmans C B，Pagter B de. The Order Bidual of Lattice Ordered Algebras [J]. Journal of Functional Analysis，1984，59：41－64.

[2] Huijsmans C B. The Order Bidual of Lattice Orderded Algebras Ⅱ [J]. Journal of Operator Theory，1989，22：277－290.

[3] Bernau S J，Huijsmans C B. The Order Bidual of Almost f-algebra and d-algebra [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1995，347：4259－4275.

[4] Bernau S J，Huijsmans C B. Almost f-algebra and d-algebra [J]. Mathematical Proceedings of Cambrige Philosophical Socirty，1990，107：287－308.

[5] Aliprantis C D，Burkinshaw O. Positive Operators [M]. Orlando：Academic Press，1985：74－126.

A Remark on the Order Bidual of Lattice Ordered Algebras

FENG Ying

Department of Mathematics，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China

Abstract：In this paper，the order structure properties of multiplicative spaces about the order continuous bidual and the order dual in lattice ordered algebras (f-algebra，almost f-algebra and d-algebra)，equipped with Arens multiplication，are mainly studied. Specially，a necessary and sufficient condition is derived for the order continuous bidual of a f-algebra to be semiprime.

Key words：Arens multiplication；f-algebra；almost f-algebra；d-algebra；order continuous bidual

责任编辑　覃吉康