文章编号: 1000-5471(2008)03-0011-04

含(g,η)-单调算子的完全广义拟变分包含[①]

崔艳兰，　李红果

延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000

摘要: 引入和研究了一类新的含(g, η)-单调算子的广义拟变分包含，在 Hilbert 空间中运用与(g, η)-单调算子相联系的预解算子性质，构造了一类求变分包含逼近解的迭代算法，并讨论了由此算法产生的迭代序列的收敛性.

关　键　词: 变分包含；(g, η)-单调算子；预解式算子技巧；迭代算法；收敛性

中图分类号: O177.91　　**文献标识码: A**

本文假定 H 是一实 Hilbert 空间，$\|\cdot\|$ 和$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 H 中的范数和内积，2^H,$CB(H)$ 分别表示 H 的所有非空子集和所有非空有界闭子集构成的集合，$\overline{H}(\cdot,\cdot)$ 表示 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离，本文研究下列变分包含

设 η,N: $H\times H\longrightarrow H$ 是单值映象，A,T,G,F: $H\longrightarrow CB(H)$ 是集值映象，f: $H\longrightarrow H$ 是单值映象，M: $H\times H\longrightarrow 2^H$ 是集值映象，对于任意 $t\in H$，$M(\cdot, f(t))$ 是(g, η)-单调映象. 考虑下列广义变分包含问题：求 $x\in H$，$\omega\in Ax$，$v\in Tx$，$z\in Gx$，$u\in Fx$，使得

$$0\in N(\omega, v)+M(z, f(x))+u \tag{1}$$

注 1　若 $F(x)\equiv\theta$，$f=g=I$，则(1) 等价于找 $x\in H$，$\omega\in Ax$，$v\in Tx$，$z\in Gx$，使得

$$0\in N(\omega, v)+M(z, x) \tag{2}$$

此问题在文献[1] 中研究过.

注 2　若对任意 $t\in H$，若 $G\equiv I$，且 $M(\cdot, t)=M(\cdot)$，则(1) 等价于找 $x\in H$，$\omega\in Ax$，$v\in Tx$，使得

$$0\in N(\omega, v)+M(x) \tag{3}$$

此问题在文献[2] 中研究过.

定义 1　设 g: $H\longrightarrow H$ 和 η: $H\times H\longrightarrow H$ 是单值映象，M: $H\longrightarrow 2^H$ 是集值映象，称 M 是(g, η)-单调的，若 M 是 η-单调的且对一切 $\lambda>0$ 都有$(g+\lambda M)(H)=H$.

引理 1　设 g: $H\longrightarrow H$ 是严格 η-单调的，且对于任意的 $t\in H$，$M(\cdot, f(t))$: $H\longrightarrow 2^H$ 是(g, η)-单调映象，则 $x\in H$，$\omega\in Ax$，$v\in Tx$，$z\in Gx$，$u\in Fx$ 是问题(1) 的解当且仅当

$$z=R^{g,\lambda}_{M(\cdot, f(x))}(g(z)-\lambda u-\lambda N(\omega, v))$$

其中 $R^{g,\lambda}_{M(\cdot, f(x))}=(g+\lambda M(\cdot, f(x)))^{-1}$，$\lambda>0$ 是常数.

证　由文献[2] 中的定义 2.2 很容易证明.

由引理 1 我们可构造问题(1) 解的迭代算法.

算法 1　对任意 $x_0\in H$，$\omega_0\in A(x_0)$，$v_0\in T(x_0)$，$z_0\in G(x_0)$，$u_0\in F(x_0)$，根据文献[3]，定义迭代序列$\{x_n\}$，$\{\omega_n\}$，$\{v_n\}$，$\{z_n\}$ 和$\{u_n\}$，满足

---

① 收稿日期: 2007-09-04

基金项目: 陕西省教育厅专项科研计划项目(04JK301).

作者简介: 崔艳兰(1953-)，女，陕西绥德人，教授，主要从事非线性分析的研究.

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = x_n - z_n + R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_n))}(g(z_n) - \lambda u_n - \lambda N(w_n,\, v_n)) \\
\| \omega_n - \omega_{n+1} \| \leqslant (1 + \dfrac{1}{n+1}) \overline{H}(A(x_n),\, A(x_{n+1})) \\
\| v_n - v_{n+1} \| \leqslant (1 + \dfrac{1}{n+1}) \overline{H}(T(x_n),\, T(x_{n+1})) \\
\| z_n - z_{n+1} \| \leqslant (1 + \dfrac{1}{n+1}) \overline{H}(G(x_n),\, G(x_{n+1})) \\
\| u_n - u_{n+1} \| \leqslant (1 + \dfrac{1}{n+1}) \overline{H}(F(x_n),\, F(x_{n+1}))
\end{cases}
$$

其中 $\omega_n \in A(x_n)$，$v_n \in T(x_n)$，$z_n \in G(x_n)$，$u_n \in F(x_n)$，$n = 0,1,2,\cdots$，$\lambda > 0$ 是常数.

定理 1 设 g：$H \longrightarrow H$ 是 ζ 强 η -单调映象，且是 t -Lipschitz 连续的，η：$H \times H \longrightarrow H$ 是 δ -Lipschitz 连续的，M：$H \times H \longrightarrow 2^H$ 是集值映象，对每一固定的 $h \in H$，$M(\cdot,\, f(h))$ 是 $(g,\, \eta)$ -单调的，f：$H \longrightarrow H$ 是 λ_1 -Lipschitz 连续的，$N(\cdot,\, \cdot)$ 在第一变元关于 A 是 τ - η -余强制的，关于第一、二变元分别是 ε_1，ε_2 -Lipschitz 连续的，A,T,G,F 分别是 l_1, l_2, l_3, l_4 - $\overline{H}$ -Lipschitz 连续的，且 G 是 γ -强单调的. 假设存在常数 $\lambda > 0$，$\lambda_2 > 0$，使得对于 $\forall\, x, y \in H$，有

$$
\| R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x))}(z) - R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(y))}(z) \| \leqslant \lambda_2 \| f(x) - f(y) \| \leqslant \lambda_1 \lambda_2 \| x - y \| \qquad \forall\, x, y, z \in H \tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
| \lambda - \dfrac{\tau l_1^2 \varepsilon_1^2 - AB}{l_1^2 \varepsilon_1^2 - B^2} | < \dfrac{\sqrt{(\tau l_1^2 \varepsilon_1^2 - AB)^2 - (l_1^2 \varepsilon_1^2 - B^2)(\delta^2 - A^2)}}{l_1^2 \varepsilon_1^2 - B^2} \\
k = 1 - \sqrt{1 - 2\gamma + l_3^2} - \lambda_1 \lambda_2 \\
l_1^2 \varepsilon_1^2 - B^2 > 0 \\
A = \dfrac{\delta}{\zeta} k - \sqrt{t^2 l_3^2 - 2\xi + \delta^2} \\
B = l_4 + l_2 \varepsilon_2 \\
\tau l_1^2 \varepsilon_1^2 > \sqrt{(l_1^2 \varepsilon_1^2 - B^2)(\delta^2 - A^2)} + AB \\
(l_4 + l_2 \varepsilon_2) \lambda < \dfrac{\delta}{\zeta} k - \sqrt{t^2 l_3^2 - 2\xi + \delta^2}
\end{cases} \tag{5}
$$

则由算法 1 生成的序列 $\{x_n\}$，$\{\omega_n\}$，$\{v_n\}$，$\{z_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 分别强收敛于 x, ω, v, z 和 u，且 $(x,\, \omega,\, v,\, z,\, u)$ 是问题 (1) 的解.

证 由算法 1、引理 1 和文献[2] 中的定理 2.1，有

$$
\begin{aligned}
& \| x_{n+1} - x_n \| \\
\leqslant\ & \| x_n - x_{n-1} - (z_n - z_{n-1}) \| + \\
& \| R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_n))}(g(z_n) - \lambda u_n - \lambda N(\omega_n,\, v_n)) - R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_{n-1}))}(g(z_{n-1}) - \lambda u_{n-1} - \lambda N(\omega_{n-1},\, v_{n-1})) \| \\
\leqslant\ & \| x_n - x_{n-1} - (z_n - z_{n-1}) \| + \\
& \| R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_n))}(g(z_n) - \lambda u_n - \lambda N(\omega_n,\, v_n)) - R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_n))}(g(z_{n-1}) - \lambda u_{n-1} - \lambda N(\omega_{n-1},\, v_{n-1})) \| + \\
& \| R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_n))}(g(z_{n-1}) - \lambda u_{n-1} - \lambda N(\omega_{n-1},\, v_{n-1})) - R^{g,\lambda}_{M(\cdot,\, f(x_{n-1}))}(g(z_{n-1}) - \lambda u_{n-1} - \lambda N(\omega_{n-1},\, v_{n-1})) \| \\
\leqslant\ & \| x_n - x_{n-1} - (z_n - z_{n-1}) \| + \lambda_1 \lambda_2 \| x_n - x_{n-1} \| + \frac{\delta}{\zeta} \| u_n - u_{n-1} - \eta(x_n,\, x_{n-1}) \| + \\
& \frac{\delta}{\zeta} \| \eta(x_n,\, x_{n-1}) - \lambda [N(\omega_n,\, v_n) - N(\omega_{n-1},\, v_{n-1})] \|
\end{aligned} \tag{6}
$$

而

$$
\begin{aligned}
& \| \eta(x_n,\, x_{n-1}) - \lambda [N(\omega_n,\, v_n) - N(\omega_{n-1},\, v_{n-1})] \| \\
\leqslant\ & \| \eta(x_n,\, x_{n-1}) - \lambda [N(\omega_n,\, v_n) - N(\omega_{n-1},\, v_n)] \| + \lambda \| N(\omega_{n-1},\, v_n) - N(\omega_{n-1},\, v_{n-1}) \|
\end{aligned}
$$

由于 G 是 γ -强单调且 l_3 - $\overline{H}$ -Lipschitz 连续的，则由算法 1 有

$$
\| x_n - x_{n-1} - (z_n - z_{n-1}) \|^2 = \| x_n - x_{n-1} \|^2 - 2 \langle z_n - z_{n-1},\, x_n - x_{n-1} \rangle + \| z_n - z_{n-1} \|^2
$$

$$\leqslant (1-2\gamma)\|x_n-x_{n-1}\|^2+(1+\frac{1}{n})^2\overline{H}^2(G_{x_n},G_{x_{n-1}})$$

$$\leqslant (1-2\gamma+(1+\frac{1}{n})^2l_3^2)\|x_n-x_{n-1}\|^2 \tag{7}$$

另外，由 F 的 $l_4-\overline{H}$-Lipschitz 连续性有

$$\|u_n-u_{n-1}\|\leqslant (1+\frac{1}{n})\overline{H}(F(x_n),F(x_{n-1}))\leqslant (1+\frac{1}{n})l_4\|x_n-x_{n-1}\| \tag{8}$$

再由 g 关于 G 的 $\xi-\eta$-强单调性、Lipschitz 连续性及 η 的 Lipschitz 连续性可得

$$\begin{aligned}&\|g(z_n)-g(z_{n-1})-\eta(x_n,x_{n-1})\|^2\\&=\|g(z_n)-g(z_{n-1})\|^2-2\langle g(z_n)-g(z_{n-1}),\eta(x_n-x_{n-1})\rangle+\|\eta(x_n-x_{n-1})\|^2\\&\leqslant (t^2l_3^2(1+\frac{1}{n})^2-2\xi+\delta^2)\|x_n-x_{n-1}\|^2\end{aligned} \tag{9}$$

由 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 A 的 $\tau-\eta$-余强制性、关于第一变元的 ε_1-Lipschitz 连续性、关于第二变元的 ε_2-Lipschitz 连续性、A 的 $l_1-\overline{H}$-Lipschitz 连续性及 T 的 $l_2-\overline{H}$-Lipschitz 连续性，可得

$$\begin{aligned}&\|\eta(x_n,x_{n-1})-\lambda[N(\omega_n,v_n)-N(\omega_{n-1},v_n)]\|^2\\&=\lambda^2\|N(\omega_n,v_n)-N(\omega_{n-1},v_n)\|^2+\|\eta(x_n-x_{n-1})\|^2-2\lambda\langle N(\omega_n,v_n)-N(\omega_{n-1},v_n),\eta(x_n-x_{n-1})\rangle\\&\leqslant (\lambda^2l_1^2\varepsilon_1^2(1+\frac{1}{n})^2-2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2(1+\frac{1}{n})^2+\delta^2)\|x_n-x_{n-1}\|^2\end{aligned} \tag{10}$$

$$\|N(\omega_{n-1},v_n)-N(\omega_{n-1},v_{n-1})\|\leqslant l_2\varepsilon_2(1+\frac{1}{n})\|x_n-x_{n-1}\| \tag{11}$$

由(4)～(11)式可得

$$\begin{aligned}&\|x_n-x_{n-1}\|\\&\leqslant\Big[\sqrt{1-2\gamma+(1+\frac{1}{n})^2l_3^2}+\lambda_1\lambda_2+\frac{\delta\lambda}{\gamma}(1+\frac{1}{n})l_4+\frac{\delta}{\gamma}\sqrt{t^2l_3^2(1+\frac{1}{n})^2-2\xi+\delta^2}+\\&\quad\frac{\delta}{\gamma}\sqrt{\lambda^2l_1^2\varepsilon_1^2(1+\frac{1}{n})^2-2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2(1+\frac{1}{n})^2+\delta^2}+\frac{\delta\lambda}{\gamma}l_2\varepsilon_2(1+\frac{1}{n})\Big]\|x_n-x_{n-1}\|\\&=\theta_n\|x_n-x_{n-1}\|\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\theta_n=&\sqrt{1-2\gamma+(1+\frac{1}{n})^2l_3^2}+\lambda_1\lambda_2+\frac{\delta\lambda}{\zeta}(1+\frac{1}{n})l_4+\frac{\delta}{\zeta}\sqrt{t^2l_3^2(1+\frac{1}{n})^2-2\xi+\delta^2}+\\&\frac{\delta}{\zeta}\sqrt{\lambda^2l_1^2\varepsilon_1^2(1+\frac{1}{n})^2-2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2(1+\frac{1}{n})^2+\delta^2}+\frac{\delta\lambda}{\zeta}l_2\varepsilon_2(1+\frac{1}{n})\end{aligned}$$

令

$$0<\theta=\sqrt{1-2\gamma+l_3^2}+\lambda_1\lambda_2+\frac{\delta\lambda}{\zeta}l_4+\frac{\delta}{\zeta}\sqrt{t^2l_3^2-2\xi+\delta^2}+\frac{\delta}{\zeta}\sqrt{\lambda^2l_1^2\varepsilon_1^2-2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2+\delta^2}+\frac{\delta\lambda}{\zeta}l_2\varepsilon_2$$

则当 $n\to+\infty$ 时，有 $\theta_n\to\theta$. 由条件(5)得 $0<\theta<1$，因此当 n 充分大时 $\theta_n<1$，于是知 $\{x_n\}$ 是 H 中的柯西列，设 $x_n\to x\in H\ (n\to\infty)$，由算法 1 和 A,T,G,F 的连续性得

$$\begin{cases}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\leqslant(1+\frac{1}{n+1})l_1\|x_n-x_{x+1}\|\\ \|v_n-v_{n+1}\|\leqslant(1+\frac{1}{n+1})l_2\|x_n-x_{x+1}\|\\ \|z_n-z_{n+1}\|\leqslant(1+\frac{1}{n+1})l_3\|x_n-x_{x+1}\|\\ \|u_n-u_{n+1}\|\leqslant(1+\frac{1}{n+1})l_4\|x_n-x_{x+1}\|\end{cases} \tag{12}$$

由于 $\{x_n\}$ 是柯西列，则由(12)式知 $\{x_n\},\{\omega_n\},\{v_n\},\{z_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 都是柯西列. 令 $\omega_n\to\omega$，$v_n\to v$，$z_n\to z$，$u_n\to u\ (n\to\infty)$. 这里

$$\begin{aligned} d(\omega, Ax) &\leqslant \| \omega - \omega_n \| + d(\omega_n, Ax) \\ &\leqslant \| \omega - \omega_n \| + \overline{H}(Ax_n, Ax) \\ &\leqslant \| \omega - \omega_n \| + l_1 \| x_n - x \| \to 0 \end{aligned}$$

故 $\omega \in Ax$. 同理可得 $v \in Tx$, $z \in Gx$, $u \in Fx$.

令 $n \to \infty$, 由算法1及 A, T, G, F 的 Lipschitz 连续性可得

$$z = R^{g,\lambda}_{M(\cdot, f(x))}(g(z) - \lambda u - \lambda N(\omega, v))$$

所以,由引理1知,(x, ω, v, z, u) 是问题(1)的解.

参考文献:

[1] Huang Nan-jing, Fang Ya-ping. A New Class of General Variational Inclusions Involving Maximal η - monotone Mappings [J]. Publ Math Debrecen, 2003, 62(1/2): 83-98.

[2] 张清邦,丁协平. g-η-单调映象和解广义隐拟变分包含的预解算子技巧 [J]. 应用数学和力学, 2007, 28(1): 9-16.

[3] Nadler S B. Multivalued Contraction Mappings [J]. Pacific J Math, 1969, 30: 475-488.

[4] Jin Maoming. Existence and Algorithm of Solution for a New Class of Set-valued Nonliear Variational Inclusions [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2006, 31(2): 35-37.

[5] 邓方平,丁协平. H-单调算子与广义集值变分包含组 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2005, 28(2): 149-153.

[6] Sun Jia-ping, Deng Lei. η-Proximal Piont Algorithm for a Syatem of Generalized Impicit Quasi-Variational-Like Inclusion Problems [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(8): 28-32.

[7] Ding Xie-ping. Proximal Point Algorithm for Solving Generalized Quasi-variational-like Incl-usion with Pseudom on One Type Mappings [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2004, 27(3): 221-227.

Generalized Nonliear Set-valued Variational Inclusions Involving (g, η)-Monotone Operators

CUI Yan-lan, LI Hong-guo

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China

Abstract: A new class of generalized set-valued variational inclusions involving (g, η)-monotone operator are introduced and studied. By using the properties of the resolvent operator associated with a (g, η)-monotone operator in Hilbert space, a new algorithm for approcimating the solution of this class of variational inclusions was given, the vonvergence of the sequence of iterates generated by the algorithm was also discussed.

Key words: variational inclusions; (g, η)-monotone operator; resolvent operator technique; iterative algorithm; convergence

责任编辑 覃吉康