第 33 卷　第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2008 年 6 月
Vol. 33　No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2008

文章编号：1000-5471(2008)03-0005-06

关于渐进非扩张映象 Noor 迭代的进一步修正①

巨小维，　谷　峰

杭州师范大学 数学系，杭州 310036

摘要：将修正 Noor 迭代迭做了进一步的修正，并在 Banach 空间中建立了关于渐进非扩张映象的强收敛定理.

关　键　词：渐进非扩张映射；全连续；一致凸；Noor 迭代；修正 Noor 迭代

中图分类号：O177.91　　　　**文献标识码**：A

Banach 空间中，关于逼近渐进非扩张映象不动点的迭代格式已经被许多作者广泛提出，其中包括 Mann 迭代和 Ishikawa 迭代[1,2]. 许多迭代方法被用来研究某些实际问题的近似解[1]. 2000 年，文献[1]引入了一个三步迭代格式，并且利用这种格式研究了 Hilbert 空间中变分包含的近似解问题.

文献[3]引入和研究了 Banach 空间中关于逼近渐进非扩张映象不动点的三步迭代格式，文献[2]将这一格式改进为带有误差项的三步迭代格式，并给出了 Banach 空间中关于渐进非扩张映象的具有误差项的三步迭代的强弱收敛定理. 在此基础上，文献[4]引入和研究了另一类三步迭代格式. 在前面结论的启发下，本文引入和研究了 3 个映象的三步迭代格式. 迭代格式定义如下：

设 X 是一个赋泛空间，C 是 X 的一个非空凸子集，T_1, T_2, T_3 分别是 C 上的自映象，对于任意 $x_1 \in C$，利用以下迭代格式定义序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$.

$$\begin{aligned} z_n &= a_n T_1^n x_n + (1-a_n)x_n \\ y_n &= b_n T_2^n z_n + c_n T_1^n x_n + (1-b_n-c_n)x_n \qquad n \geqslant 1 \\ x_{n+1} &= \alpha_n T_3^n y_n + \beta_n T_2^n z_n + (1-\alpha_n-\beta_n)x_n \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$，是取自 $[0,1]$ 中的序列. T 是 C 上的自映象. 如果将(1)中的映象都改为 T，那么此迭代格式就简化为修正 Noor 迭代；如果 $c_n \equiv \beta_n \equiv 0$，那么(1)简化为文献[2]中定义的 Noor 迭代；如果 $a_n = c_n = \beta_n \equiv 0$，那么(1)简化为修正 Ishikawa 迭代；如果 $a_n = b_n = c_n = \beta_n \equiv 0$，那么(1)进一步简化为修正 Mann 迭代.

本文的目的是利用迭代格式(1)，在一致凸 Banach 空间中建立几种关于全连续渐近非扩张映象的强收敛定理. 本文的结果发展和改进了文献[2，4]的相关结论.

下面我们来回忆一下已有的结论.

引理 1　设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{\delta_n\}$ 是非负实数序列，并且满足不等式

$$a_{n+1} \leqslant (1+\delta_n)a_n + b_n \qquad \forall\, n = 1, 2, \cdots$$

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$，则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；

① 收稿日期：2007-06-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771141)；浙江省自然科学基金资助项目(Y605191)；黑龙江省自然科学基金资助项目(A0211).
作者简介：巨小维(1982-)，女，黑龙江鸡西人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通讯作者：谷　峰，教授.

(ii) 当$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

引理 2 设$p > 1$，$r > 0$是两个固定的数，则 Banach 空间X是一致凸的当且仅当存在一个连续的、严格增的凸函数g：$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$，$g(0) = 0$，满足

$$\| \lambda x + (1-\lambda) y \|^p \leqslant \lambda \| x \|^p + (1-\lambda) \| y \|^p - \omega_p(\lambda) g(\| x - y \|)$$

对于$B_r = \{x \in X: \| x \| \leqslant r\}$，$\lambda \in [0, 1]$中的任意$x, y$都成立，这里$\omega_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$.

引理 3 设X是一致凸的 Banach 空间，$B_r = \{x \in X: \| x \| \leqslant r\}$，$r > 0$，则存在一个连续的、严格增的凸函数$g$：$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$，$g(0) = 0$，满足

$$\| \lambda x + \beta y + \gamma z \|^2 \leqslant \lambda \| x \|^2 + \beta \| y \|^2 + \gamma \| z \|^2 - \lambda\beta g(\| x - y \|)$$

对于$x, y, z \in B_r$，$\lambda, \beta, \gamma \in [0, 1]$并且$\lambda + \beta + \gamma = 1$都成立.

我们首先来证明下面的引理.

引理 4 如果$\{b_n\}, \{c_n\} \in [0, 1]$且满足$\limsup\limits_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$，实数序列$\{k_n\}$满足$k_n \geqslant 1 (\forall n \geqslant 1)$，并且$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$，则存在一个正整数$N_1$和$\gamma \in (0, 1)$，满足$c_n k_n < \gamma$，$\forall n \geqslant N_1$.

证 由$\limsup\limits_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$可知，存在一个正整数$N_0$和$\eta \in (0, 1)$，满足

$$c_n \leqslant b_n + c_n < \eta \qquad \forall n \geqslant N_0$$

设$\eta' \in (0, 1)$并且$\eta' > \eta$. 由$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$可知，存在一个正整数$n_1 \geqslant N_0$，满足

$$k_n - 1 < \frac{1}{\eta'} - 1 \qquad \forall n \geqslant N_1$$

由此可得$k_n < \dfrac{1}{\eta'}$，$\forall n \geqslant N_1$. 令$\gamma = \dfrac{\eta}{\eta'}$，则有$c_n k_n < \gamma$，$\forall n \geqslant N_1$.

引理 5 设X是一致凸的 Banach 空间，C是X的一个非空有界闭凸子集，T_i是C上的渐近非扩张自映象，具有序列k_{n_i}，满足$k_{n_i} \geqslant 1$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{n_i} - 1) < \infty$，$i = 1,2,3$. 设$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$是$[0, 1]$中的实序列，满足$b_n + c_n$，$\alpha_n + \beta_n \in [0, 1]$，$n \geqslant 1$. 对于给定的$x_1 \in C$，设$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$是(1)式中定义的序列. 如果$\bigcap F(T_i) \neq \emptyset$，$i = 1,2,3$，则有

(i) 如果$q \in \bigcap F(T_i)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - q \|$存在.

(ii) 如果有$\liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n > 0$和$0 < \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \| T_2^n z_n - x_n \| = 0$.

(iii) 如果$0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) < 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \| T_3^n y_n - x_n \| = 0$.

(iv) 如果$0 < \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$，$0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) < 1$，则

$$\lim_{n\to\infty} \| T_1^n x_n - x_n \| = 0$$

证 令$k_n = \sup\{k_{n_1}, k_{n_2}, k_{n_3}\}$，取$x^* \in \bigcap F(T_i)$，选择适当的$r > 0$，使得$C \subseteq B_r$，并且$C - C \subseteq B_r$. 由引理 2 知，存在一个连续的、严格增的凸函数g_1：$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$，$g_1(0) = 0$，满足

$$\| \lambda x + (1-\lambda) y \|^2 \leqslant \lambda \| x \|^2 + (1-\lambda) \| y \|^2 - \omega_2(\lambda) g_1(\| x - y \|) \tag{2}$$

这里$x, y \in B_r$，$\lambda \in [0, 1]$，$\omega_2(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^2 + \lambda^2(1-\lambda)$. 从(2)式可得

$$\begin{aligned}\| z_n - x^* \|^2 &= \| a_n(T_1^n x_n - x^*) + (1-a_n)(x_n - x^*) \|^2 \\ &\leqslant a_n \| T_1^n x_n - x^* \|^2 + (1-a_n) \| x_n - x^* \|^2 - \omega_2(a_n) g_1(\| T_1^n x_n - x_n \|) \\ &\leqslant a_n k_n^2 \| x_n - x^* \|^2 + (1-a_n) \| x_n - x^* \|^2 \\ &\leqslant (1 + a_n k_n^2 - a_n) \| x_n - x^* \|^2\end{aligned}$$

利用引理 3 可知，存在一个连续的、严格增的凸函数g_2：$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$，$g_2(0) = 0$，满足

$$\| \lambda x + \beta y + \gamma z \|^2 \leqslant \lambda \| x \|^2 + \beta \| y \|^2 + \gamma \| z \|^2 - \lambda\beta g_2(\| x - y \|) \tag{3}$$

这里$x, y, z \in B_r$，$\lambda, \beta, \gamma \in [0, 1]$，并且$\lambda + \beta + \gamma = 1$. 由(3)式可得

$$\begin{aligned}\| y_n - x^* \|^2 &= \| b_n(T_2^n z_n - x^*) + (1 - b_n - c_n)(x_n - x^*) + c_n(T_1^n x_n - x^*) \|^2 \\ &\leqslant b_n \| T_2^n z_n - x^* \|^2 + (1 - b_n - c_n) \| x_n - x^* \|^2 + c_n \| T_1^n x_n - x^* \|^2 -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)\\ \leqslant\ & b_nk_n^2\|z_n-x^*\|^2+c_nk_n^2\|x_n-x^*\|^2+(1-b_n-c_n)\|x_n-x^*\|^2-\\ &b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2=\ &\|\alpha_n(T_3^n y_n-x^*)+(1-\alpha_n-\beta_n)(x_n-x^*)+\beta_n(T_2^n z_n-x^*)\|^2\\ \leqslant\ &\alpha_n\|T_3^n y_n-x^*\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-x^*\|^2+\beta_n\|T_2^n z_n-x^*\|^2-\\ &\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ \leqslant\ &\alpha_nk_n^2\|y_n-x^*\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-x^*\|^2+\beta_nk_n^2\|z_n-x^*\|^2-\\ &\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ \leqslant\ &\alpha_nk_n^2(b_nk_n^2\|z_n-x^*\|^2+c_nk_n^2\|x_n-x^*\|^2+(1-b_n-c_n)\|x_n-x^*\|^2-\\ &b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|))+\beta_nk_n^2\|z_n-x^*\|^2+\\ &(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-x^*\|^2-\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ =\ &\|x_n-x^*\|^2+(\alpha_nc_nk_n^4+\alpha_nk_n^2(1-b_n-c_n)-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-x^*\|^2+\\ &(\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2)\|z_n-x^*\|^2-\alpha_nk_n^2b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)-\\ &\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ \leqslant\ &\|x_n-x^*\|^2+(\alpha_nk_n^2c_n(k_n^2-1)+\alpha_n(k_n^2-1)-\alpha_nk_n^2b_n-\beta_n)\|x_n-x^*\|^2+\\ &(\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2)(1+a_nk_n^2-a_n)\|x_n-x^*\|^2-\alpha_nk_n^2b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)-\\ &\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ =\ &\|x_n-x^*\|^2+(\alpha_nk_n^2c_n(k_n^2-1)+\alpha_n(k_n^2-1)-\alpha_nk_n^2b_n-\beta_n+\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2+\\ &(\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2)a_n(k_n^2-1))\|x_n-x^*\|^2-\alpha_nk_n^2b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)-\\ &\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ =\ &\|x_n-x^*\|^2+(\alpha_nk_n^2c_n(k_n^2-1)+\alpha_n(k_n^2-1)+\alpha_nb_nk_n^2(k_n^2-1)+\beta_n(k_n^2-1)+\\ &(\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2)a_n(k_n^2-1))\|x_n-x^*\|^2-\alpha_nk_n^2b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)-\\ &\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\\ =\ &\|x_n-x^*\|^2+(k_n^2-1)(\alpha_nk_n^2c_n+\alpha_n+\alpha_nb_nk_n^2+\beta_n+(\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2)a_n)\|x_n-x^*\|^2-\\ &\alpha_nk_n^2b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)-\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\end{aligned}$$

因为$\{k_n\}$和 C 是有界的，所以存在一个常数 $M>0$，使得

$$(\alpha_nk_n^2c_n+\alpha_n+\alpha_nb_nk_n^2+\beta_n+(\alpha_nb_nk_n^4+\beta_nk_n^2)a_n)\|x_n-x^*\|^2\leqslant M\qquad n\geqslant 1$$

由此可得

$$\alpha_nk_n^2b_n(1-b_n-c_n)g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)\leqslant\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2+M(k_n^2-1)\tag{4}$$

$$\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)g_2(\|T_3^n y_n-x_n\|)\leqslant\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2+M(k_n^2-1)\tag{5}$$

(i) 如果 $q\in\bigcap F(T_i)$，$i=1,2,3$，令 $x^*=q$，由(4)式可得

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2+M(k_n^2-1)$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n^2-1)<\infty$，利用引理 1 可得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ 存在.

(ii) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\alpha_n>0$和$0<\lim\limits_{n\to\infty}\inf b_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sup(b_n+c_n)<1$，则存在一个正整数 n_0，以及 η，$\eta'\in(0,1)$，满足 $0<\eta<b_n$，$0<\eta<\alpha_n$，并且 $b_n+c_n<\eta'<1$，$n\geqslant n_0$. 利用(4)式可得

$$\eta^2(1-\eta')g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)\leqslant\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2+M(k_n^2-1)\qquad n\geqslant n_0\tag{6}$$

对于 $m\geqslant n_0$，从(6)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{m}g_2(\|T_2^n z_n-x_n\|)&\leqslant\frac{1}{\eta^2(1-\eta')}\Big(\sum_{n=n_0}^{m}(\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2)+M\sum_{n=n_0}^{m}(k_n^2-1)\Big)\\ &\leqslant\frac{1}{\eta^2(1-\eta')}\Big(\|x_{n_0}-x^*\|^2+M\sum_{n=n_0}^{m}(k_n^2-1)\Big)\end{aligned}\tag{7}$$

因为当 $t \geqslant 1$ 时，有 $0 \leqslant t^2 - 1 \leqslant 2t(t-1)$，再利用 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$. 在(7)式中令 $m \to \infty$ 可得 $\sum_{n=n_0}^{\infty} g_2(\| T_2^n z_n - x_n \|) < \infty$，因此 $\lim_{n\to\infty} g_2(\| T_2^n z_n - x_n \|) = 0$. 因为 g_2 是严格增的连续函数，并且有 $g_2(0) = 0$，于是有 $\lim_{n\to\infty} \| T_2^n z_n - x_n \| = 0$.

(iii) 如果 $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) < 1$，那么，对(5)式利用同样的方法可得

$$\lim_{n\to\infty} \| T_3^n y_n - x_n \| = 0$$

(iv) 如果 $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$，$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) < 1$，利用 (ii) 中的方法同样可以证得

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \| T_2^n z_n - T_1^n x_n \| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \| T_3^n y_n - T_2^n z_n \| = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

并且

$$\begin{aligned} \| T_1^n x_n - x_n \| &\leqslant \| T_1^n x_n - T_3^n y_n \| + \| T_3^n y_n - x_n \| \\ &\leqslant \| T_1^n x_n - T_2^n z_n \| + \| T_2^n z_n - T_3^n y_n \| + \| T_3^n y_n - x_n \| \end{aligned} \tag{9}$$

于是利用 (iii) 中的结论和(8),(9) 式可得 $\lim_{n\to\infty} \| T_1^n x_n - x_n \| = 0$.

定理 1 设 X 是一致凸的 Banach 空间，C 是 X 的一个非空有界闭凸子集，T_i 是 C 上的全连续渐近非扩张自映象，具有序列 k_{n_i}，满足 $k_{n_i} \geqslant 1$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n_i} - 1) < \infty$，$i = 1,2,3$. 设 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列，满足 $b_n + c_n, \alpha_n + \beta_n \in [0, 1]$，$n \geqslant 1$，并且

(i) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n) < 1$;

(ii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) < 1$.

设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$ 是(1) 式中定义的序列. 则 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$ 强收敛到 T_1, T_2, T_3 的一个公共不动点.

证 利用引理 5，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \| T_3^n y_n - x_n \| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \| T_2^n z_n - x_n \| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \| T_1^n x_n - x_n \| = 0 \tag{10}$$

由 $x_{n+1} - x_n = \alpha_n(T_3^n y_n - x_n) + \beta_n(T_2^n z_n - x_n)$，可得

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - T_1^n x_{n+1} \| &\leqslant \| x_{n+1} - x_n \| + \| T_1^n x_{n+1} - T_1^n x_n \| + \| T_1^n x_n - x_n \| \\ &\leqslant \| x_{n+1} - x_n \| + k_n \| x_{n+1} - x_n \| + \| T_1^n x_n - x_n \| \\ &= (1 + k_n) \| x_{n+1} - x_n \| + \| T_1^n x_n - x_n \| \\ &\leqslant (1 + k_n)\alpha_n \| T_3^n y_n - x_n \| + (1 + k_n)\beta_n \| T_2^n z_n - x_n \| + \| T_1^n x_n - x_n \| \end{aligned}$$

并利用(10) 式可得

$$\| x_{n+1} - T_1^n x_{n+1} \| \to 0 \qquad n \to \infty$$

于是

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - T_1 x_{n+1} \| &\leqslant \| x_{n+1} - T_1^{n+1} x_{n+1} \| + \| T_1 x_{n+1} - T_1^{n+1} x_{n+1} \| \\ &\leqslant \| x_{n+1} - T_1^{n+1} x_{n+1} \| + k_1 \| x_{n+1} - T_1^n x_{n+1} \| \to 0 \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty} \| T_1 x_n - x_n \| = 0 \tag{11}$$

因为 T_1 是全连续的，并且 $\{x_n\} \subseteq C$ 是有界的，所以存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\{T_1 x_{n_k}\}$ 收敛. 由(11) 式可得 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 设 $\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = q$. 由 T_1 的连续性和(11) 可得 $T_1 q = q$. 因为

$$\begin{aligned} &\| y_{n_k} - x_{n_k} \| \leqslant b_{n_k} \| T_2^{n_k} z_{n_k} - x_{n_k} \| + c_{n_k} \| T_1^{n_k} x_{n_k} - x_{n_k} \| \to 0 \\ &\| z_{n_k} - x_{n_k} \| \leqslant a_{n_k} \| T_1^{n_k} x_{n_k} - x_{n_k} \| \to 0 \qquad n \to \infty \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = q \tag{12}$$

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = q \tag{13}$$

并且

$$\| z_{n_{k+1}} - T_2^{n_k} z_{n_{k+1}} \| \leqslant \| z_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| + \| x_{n_k} - T_2^{n_k} z_{n_k} \| + \| T_2^{n_k} Z_{n_k} - T_2^{n_k} z_{n_{k+1}} \|$$

$$\leqslant \| z_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| + \| x_{n_k} - T_2^{n_k} Z_{n_k} \| + k_{n_k} \| Z_{n_k} - z_{n_{k+1}} \|$$

利用(10) 和(12) 式可得

$$\| z_{n_{k+1}} - T_2^{n_k} z_{n_{k+1}} \| \to 0 \qquad n \to \infty$$

因此

$$\| z_{n_{k+1}} - T_2 z_{n_{k+1}} \| \leqslant \| x_{n_{k+1}} - T_2^{n_{k+1}} z_{n_{k+1}} \| + \| T_2 z_{n_{k+1}} - T_2^{n_{k+1}} z_{n_{k+1}} \|$$

$$\leqslant \| x_{n_{k+1}} - T_2^{n_{k+1}} z_{n_{k+1}} \| + k_1 \| z_{n_{k+1}} - T_2^{n_k} z_{n_{k+1}} \| \to 0$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} \| x_{n_k} - T_2 Z_{n_k} \| = 0 \tag{14}$$

利用同样方法可以证得

$$\lim_{k\to\infty} \| x_{n_k} - T_3 y_{n_k} \| = 0 \tag{15}$$

由 T_2 的连续性和(12)，(14) 式可知 $T_2 q = q$. 由 T_3 的连续性和(13)，(15) 式可知 $T_3 q = q$. 因此 q 是 T_1，T_2，T_3 的公共不动点. 利用引理 5(i) 可知，$\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ 存在. 又因为 $\lim\limits_{n_k\to\infty} \| x_{n_k} - q \| = 0$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \| = 0$$

因为

$$\| y_n - x_n \| \leqslant b_n \| T_2^n z_n - x_n \| + c_n \| T_1^n x_n - x_n \| \to 0$$

$$\| z_n - x_n \| \leqslant a_n \| T_1^n x_n - x_n \| \to 0 \qquad n \to \infty$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = q$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = q$.

由定理 1 不难得到以下的几个定理.

定理 2　设 X 是一致凸的 Banach 空间，C 是 X 的一个有界闭凸子集，设 T_i 是 C 上的全连续渐近非扩张自映象，具有序列 k_{n_i}，满足 $k_{n_i} \geqslant 1$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{n_i} - 1) < \infty$，$i = 1, 2, 3$. 设 $\{\alpha_n\}$，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列，满足

(i) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} b_n < 1$，

(ii) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n < 1$.

对于给定的 $x_1 \in C$，定义迭代为

$$z_n = a_n T_1^n x_n + (1 - a_n) x_n$$

$$y_n = b_n T_2^n z_n + (1 - b_n) x_n$$

$$x_{n+1} = \alpha_n T_3^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n \qquad n \geqslant 1$$

则 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 强收敛到 T_1，T_2，T_3 的一个公共不动点.

定理 3　设 X 是一致凸的 Banach 空间，C 是 X 的一个有界闭凸子集，设 T_i 是 C 上的全连续渐近非扩张自映象，具有序列 k_{n_i}，满足 $k_{n_i} \geqslant 1$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{n_i} - 1) < \infty$，$i = 1,2$. 设 $\{\alpha_n\}$，$\{b_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列，满足

(i) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} b_n < 1$；

(ii) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n < 1$.

对于给定的 $x_1 \in C$，定义迭代为

$$y_n = b_n T_1^n x_n + (1 - b_n) x_n$$

$$x_{n+1} = \alpha_n T_2^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n \qquad n \geqslant 1$$

则$\{x_n\}$,$\{y_n\}$强收敛到T_1,T_2的一个公共不动点.

定理 4　设 X 是一致凸的 Banach 空间，C 是 X 的一个有界闭凸子集，设 T 是C 上的全连续渐近非扩张自映象，具有序列 k_n，满足 $k_n \geqslant 1$ 并且$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$. 设$\{\alpha_n\}$ 是$[0, 1]$ 中的序列，满足

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$$

对于给定的 $x_1 \in C$，定义迭代为

$$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1 - \alpha_n) x_n \qquad n \geqslant 1$$

则$\{x_n\}$ 强收敛到 T 的一个不动点.

参考文献:

[1] Noor M A. New Approximation Schemes for General Variational Inequalities [J]. J Math Anal Appl, 2000, 251: 217－229.

[2] Xu B L, Aslam Noor M. Fixed Point Iterations for Asymptotically Nonexpasive Mappings in Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl, 2002, 267: 444－453.

[3] Cho Y J, Zhou H Y, Guo G. Weak and Strong Convergence Theorems for three-Step Iterations with Errors for Asymptotically Nonexpasive Mappings [J]. Comput Math Appl, 2004, 47: 707－717.

[4] Suthep. Suantai, Weak and Strong Convergence Croteria of Noor Iterations for Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. J Math Anal Appl, 2005, 311: 506－517.

[5] 颜文勇，成和平，王　科. 广义集值隐拟补问题解集的有界性及迭代算法 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2008，31(1)：85－87.

[6] 王其林. 一类广义凸集值映射优化问题弱有效解的最优性条件 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2007，30(5)：556－559.

Weak and Strong Convergence Criteria of Noor Iterations for Asymptotically Nonexpasive Mappings

JU Xiao-wei,　GU　Feng

Department of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, China

Abstract: In this paper, the authors improve the modified Noor iteration, and establish strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces.

Key words: asymptotically nonexpansive mapping; completely continuous; uniformly convex; Noor iterations; modified Noor iterations

责任编辑　覃吉康