文章编号：1000-5471(2008)03-0001-04

广义集值混合似变分不等式的迭代算法①

万 波[1,2]， 邓 磊[2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：提出并研究了一类新的广义集值混合似变分不等式；运用辅助原理技巧，给出了一个求解这种广义集值混合似变分不等式问题的三步预测－校正迭代算法；并证明了该算法在适当的条件下收敛.

关 键 词：集值混合似变分不等式；预测-校正算法；辅助原理技巧

中图分类号：O177.91 **文献标识码：A**

最近，文献[1]提出了一类一般集值混合似变分不等式的预测-校正算法．受此启发，此处提出并研究一类更一般的广义集值混合似变分不等式，运用辅助原理技巧给出了一个三步预测-校正迭代算法，同时该算法收敛的条件将文献[1]中集值算子 T 是 Lipschitz 连续削弱为只需要集值算子 T 是 H-连续即可.

设 H 是一个实 Hilbert 空间，其内积和范数分别为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$；$C(H)$ 是 H 中所有非空紧子集族．设 T,V：$H\longrightarrow C(H)$ 是集值映射；N：$H\times H\longrightarrow H$，$g$：$H\longrightarrow H$ 是单值映射；φ：$H\longrightarrow R\cup\{\infty\}$ 是一个二元泛函．且单值映射 η：$H\times H\longrightarrow H$ 满足条件：

$$\eta(v,u)=-\eta(u,v) \qquad \forall u,v\in H \tag{1}$$

$$\|\eta(v_1,u)-\eta(v_2,u)\|\leqslant\|\eta(v_1,v_2)\| \qquad \forall u,v_1,v_2\in H \tag{2}$$

现在考虑广义集值混合似变分不等式问题：求 $u\in H$，$x\in T(u)$，$y\in V(u)$，使得

$$\langle N(x,y),\eta(g(v),g(u))\rangle+\varphi(g(v),g(u))-\varphi(g(u),g(u))\geqslant 0 \qquad \forall g(v)\in H \tag{3}$$

注 当 $T=V$，$\varphi(v,u)=\varphi(u)$ 时，问题(3)就正好是文献[1]所研究的问题．类似，适当选取映射 T,V,g,N,φ,η 可以得到许多已经被研究[1-5]或未被研究的变分不等式.

定义 1 设 T,V：$H\longrightarrow C(H)$，N：$H\times H\longrightarrow H$，$g$：$H\longrightarrow H$，$\eta$：$H\times H\longrightarrow H$．$N(\cdot,\cdot)$ 称为相对第一分量关于 T 是 g-η-部分松弛强单调，如果存在常数 $a>0$，对 $\forall u,v,z\in H$，满足

$$\langle N(x_1,\cdot)-N(x_2,\cdot),\eta(g(z),g(v))\rangle\geqslant -a\|\eta(g(u),g(z))\|^2 \qquad x_1\in T(u),\ x_2\in T(v)$$

如果 $\eta(v,u)=v-u$，$T=V$，则定义 1 就退化为文献[3]中 g-部分松弛强单调性的概念．类似，还可定义 $N(\cdot,\cdot)$ 相对第二分量关于 V 是 g-η-部分松弛强单调性.

对于给定的 $u\in H$，$x\in T(u)$，$y\in V(u)$，考虑下面的辅助变分不等式问题：找 $w\in H$，对 $\forall g(v)\in H$，$\rho>0$，满足

$$\langle\rho N(x,y)+\eta(g(w),g(u)),\eta(g(v),g(w))\rangle+\rho\varphi(g(v),g(w))-\rho\varphi(g(w),g(w))\geqslant 0 \tag{4}$$

显然，若 $w=u$ 且 $\eta(\cdot,\cdot)$ 满足(1)，则 w 为(3)的解．由此提出下面的预测-校正迭代算法求解问题(3).

算法 1 对任意给定的 $u_0\in H$，$\forall g(v)\in H$，由以下迭代格式计算 u_{n+1}：

$$\langle\rho N(\xi_n,\zeta_n)+\eta(g(u_{n+1}),g(w_n)),\eta(g(v),g(u_{n+1}))\rangle+\rho\varphi(g(v),g(u_{n+1}))-\rho\varphi(g(u_{n+1}),g(u_{n+1}))\geqslant 0 \tag{5}$$

其中

① 收稿日期：2007-07-05

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771173).

作者简介：万 波(1979-)，男，重庆人，硕士，主要从事变分不等式及其最优化算法的研究.

$$\| \xi_{n+1} - \xi_n \| \leqslant M(T(w_{n+1}), T(w_n)) \qquad \xi_n \in T(w_n)$$
$$\| \zeta_{n+1} - \zeta_n \| \leqslant M(V(w_{n+1}), V(w_n)) \qquad \zeta_n \in V(w_n)$$
$$\langle \beta N(c_n, d_n) + \eta(g(w_n), g(z_n)), \eta(g(v), g(w_n)) \rangle + \beta\varphi(g(v), g(w_n)) - \beta\varphi(g(w_n), g(w_n)) \geqslant 0 \tag{6}$$
其中
$$\| c_{n+1} - c_n \| \leqslant M(T(z_{n+1}), T(z_n)) \qquad c_n \in T(z_n)$$
$$\| d_{n+1} - d_n \| \leqslant M(V(z_{n+1}), V(z_n)) \qquad d_n \in V(z_n)$$
$$\langle \mu N(x_n, y_n) + \eta(g(z_n), g(u_n)), \eta(g(v), g(z_n)) \rangle + \mu\varphi(g(v), g(z_n)) - \mu\varphi(g(z_n), g(z_n)) \geqslant 0 \tag{7}$$
其中
$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant M(T(u_{n+1}), T(u_n)) \qquad x_n \in T(u_n)$$
$$\| y_{n+1} - y_n \| \leqslant M(V(u_{n+1}), V(u_n)) \qquad y_n \in V(z_n)$$
这里 $n \geqslant 0$，$\rho > 0$，$\beta > 0$，$\mu > 0$ 是常数. 显然，此算法包括了文献[1－3]中的算法作为特例.

引理 1　设(u, x, y)是问题(3)的精确解，u_n，x_n 和 y_n 是由算法 1 得到的近似解. 如果 $N(\cdot, \cdot)$ 是具有常数 $a > 0$，$b > 0$ 的相对于第一分量和第二分量关于 T 和 V 的 g－η－部分松弛强单调；二元泛函 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是斜对称的；$\eta(\cdot, \cdot)$ 为 τ－Lipschitz 连续，σ－强单调且满足条件(1)和(2)，则
$$\| g(u_{n+1}) - g(u) \|^2 \leqslant \| g(u_n) - g(u) \|^2 - \frac{[\sigma^2 - 2\rho\tau^2(a+b)]}{\sigma^2} \| g(u_{n+1}) - g(w_n) \|^2 \tag{8}$$
$$\| g(w_n) - g(u) \|^2 \leqslant \| g(w_{n-1}) - g(u) \|^2 - \frac{[\sigma^2 - 2\beta\tau^2(a+b)]}{\sigma^2} \| g(w_n) - g(z_n) \|^2 \tag{9}$$
$$\| g(z_n) - g(u) \|^2 \leqslant \| g(z_{n-1}) - g(u) \|^2 - \frac{[\sigma^2 - 2\mu\tau^2(a+b)]}{\sigma^2} \| g(z_n) - g(u_n) \|^2 \tag{10}$$
其中，$\forall\, n \geqslant 0$，$0 < \rho, \beta, \mu < \dfrac{\sigma^2}{2\tau^2(a+b)}$，$\tau \leqslant \sigma$.

证　设 $u \in H$，$x \in T(u)$，$y \in V(u)$ 是问题(3)的解，则 $\forall\, g(v) \in H$，有
$$\langle \rho N(x, y), \eta(g(v), g(u)) \rangle + \rho\varphi(g(v), g(u)) - \rho\varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0 \tag{11}$$
$$\langle \beta N(x, y), \eta(g(v), g(u)) \rangle + \beta\varphi(g(v), g(u)) - \beta\varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0 \tag{12}$$
$$\langle \mu N(x, y), \eta(g(v), g(u)) \rangle + \mu\varphi(g(v), g(u)) - \mu\varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0 \tag{13}$$
其中 $\rho > 0$，$\beta > 0$，$\mu > 0$ 是常数. 将 $v = u_{n+1}$ 代入(11)，$v = u$ 代入(5)，有
$$\langle \rho N(x, y), \eta(g(u_{n+1}), g(u)) \rangle + \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u)) - \rho\varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0 \tag{14}$$
$$\begin{aligned} &\langle \rho N(\xi_n, \zeta_n) + \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)), \eta(g(u), g(u_{n+1})) \rangle + \\ &\rho\varphi(g(u), g(u_{n+1})) - \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u_{n+1})) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{15}$$
将(14)和(15)相加，由 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 的斜对称性以及 $N(\cdot, \cdot)$ 分别是相对于第一分量和第二分量关于 T 和 V 的 g－η－部分松弛强单调和 $\eta(\cdot, \cdot)$ 是 τ-Lipschitz 连续知
$$\begin{aligned} &\langle \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)), \eta(g(u), g(u_{n+1})) \rangle \\ \geqslant &\rho\langle N(\xi_n, \zeta_n) - N(x, y), \eta(g(u_{n+1}), g(u)) \rangle + \\ &\rho\{\varphi(g(u), g(u)) - \varphi(g(u), g(u_{n+1})) - \varphi(g(u_{n+1}), g(u)) + \varphi(g(u_{n+1}), g(u_{n+1}))\} \\ \geqslant &\rho\langle N(\xi_n, \zeta_n) - N(\xi_n, y), \eta(g(u_{n+1}), g(u)) \rangle + \\ &\rho\langle N(\xi_n, y) - N(x, y), \eta(g(u_{n+1}), g(u)) \rangle \\ \geqslant &-\rho(a+b) \| \eta(g(w_n), g(u_{n+1})) \|^2 \\ \geqslant &-\rho\tau^2(a+b) \| g(w_n) - g(u_{n+1}) \|^2 \end{aligned} \tag{16}$$
$$\begin{aligned} &\langle \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)), \eta(g(u), g(u_{n+1})) \rangle \\ =&\frac{1}{2}\{ \| \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)) + \eta(g(u), g(u_{n+1})) \|^2 - \| \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)) \|^2 - \| \eta(g(u), g(u_{n+1})) \|^2 \} \end{aligned} \tag{17}$$
将(17)代入(16)，得
$$\begin{aligned} &\| \eta(g(u), g(u_{n+1})) \|^2 \\ \leqslant &\| \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)) + \eta(g(u), g(u_{n+1})) \|^2 - \| \eta(g(u_{n+1}), g(w_n)) \|^2 + 2\rho\tau^2(a+b) \| g(w_n) - g(u_{n+1}) \|^2 \end{aligned}$$

又由条件(1)和(2)及 $\eta(\cdot,\cdot)$ 为 σ-强单调和 τ-Lipschitz 连续可知

$$\begin{aligned}&\|\eta(g(u),g(u_{n+1}))\|^2\\ \leqslant&\|\eta(g(u),g(w_n))\|^2-[\sigma^2-2\rho\tau^2(a+b)]\|g(u_{n+1})-g(w_n)\|^2\\ &\sigma^2\|g(u_{n+1})-g(u)\|^2\\ \leqslant&\tau^2\|g(w_n)-g(u)\|^2-[\sigma^2-2\rho\tau^2(a+b)]\|g(u_{n+1})-g(w_n)\|^2\end{aligned}$$

因为 $0<\rho<\dfrac{\sigma^2}{2\tau^2(a+b)}$，$\tau\leqslant\sigma$，所以有

$$\begin{aligned}\|g(u_{n+1})-g(u)\|^2&\leqslant\frac{\tau^2}{\sigma^2}\|g(w_n)-g(u)\|^2-\frac{[\sigma^2-2\rho\tau^2(a+b)]}{\sigma^2}\|g(u_{n+1})-g(w_n)\|^2\\&\leqslant\frac{\tau^2}{\sigma^2}\|g(w_n)-g(u)\|^2\leqslant\|g(w_n)-g(u)\|^2\end{aligned}\tag{18}$$

同理，在(12)中取 $v=w_n$，(6)中取 $v=u$，注意到 $0<\beta<\dfrac{\sigma^2}{2\tau^2(a+b)}$，$\tau\leqslant\sigma$，以及条件(1)，(2)和 $\eta(\cdot,\cdot)$ 是 σ-强单调、τ-Lipschitz 连续，那么有

$$\begin{aligned}\|g(w_n)-g(u)\|^2&\leqslant\frac{\tau^2}{\sigma^2}\|g(z_n)-g(u)\|^2-\frac{[\sigma^2-2\beta\tau^2(a+b)]}{\sigma^2}\|g(w_n)-g(z_n)\|^2\\&\leqslant\frac{\tau^2}{\sigma^2}\|g(z_n)-g(u)\|^2\leqslant\|g(z_n)-g(u)\|^2\end{aligned}\tag{19}$$

类似，在(13)和(7)中分别令 $v=z_n$ 和 $v=u$；注意到 $0<\mu<\dfrac{\sigma^2}{2\tau^2(a+b)}$，$\tau\leqslant\sigma$，以及条件(1)，(2)和 $\eta(\cdot,\cdot)$ 是 σ-强单调、τ-Lipschitz 连续，同样有

$$\begin{aligned}\|g(z_n)-g(u)\|^2&\leqslant\frac{\tau^2}{\sigma^2}\|g(u_n)-g(u)\|^2-\frac{[\sigma^2-2\mu\tau^2(a+b)]}{\sigma^2}\|g(z_n)-g(u_n)\|^2\\&\leqslant\frac{\tau^2}{\sigma^2}\|g(u_n)-g(u)\|^2\leqslant\|g(u_n)-g(u)\|^2\end{aligned}\tag{20}$$

由(18)～(20)知结论(8)～(10)成立．证毕．

定理 1　设 H 是有限维的实 Hilbert 空间，T,V 是 H-连续集值映射，N 和 g 是连续单值映射且 g 可逆，且引理 1 条件满足，若 $0<\rho,\beta,\mu<\dfrac{\sigma^2}{2\tau^2(a+b)}$，$\tau\leqslant\sigma$ 成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$.

证　设 $(\bar{u},\bar{x},\bar{y})$ 是问题(3)的解，由引理 1 知序列 $\{\|g(\bar{u})-g(u_n)\|\}$，$\{\|g(\bar{u})-g(w_n)\|\}$，$\{\|g(\bar{u})-g(z_n)\|\}$ 单调非增，从而序列 $\{u_n\}$，$\{w_n\}$，$\{z_n\}$ 有界且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sigma^2-2\rho\tau^2(a+b)]}{\sigma^2}\|g(u_{n+1})-g(w_n)\|^2\leqslant\|g(u_n)-g(\bar{u})\|^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sigma^2-2\beta\tau^2(a+b)]}{\sigma^2}\|g(w_n)-g(z_n)\|^2\leqslant\|g(w_0)-g(\bar{u})\|^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sigma^2-2\mu\tau^2(a+b)]}{\sigma^2}\|g(z_n)-g(u_n)\|^2\leqslant\|g(z_0)-g(\bar{u})\|^2$$

这些不等式意味着当 $n\to\infty$ 时 $\|g(u_{n+1})-g(w_n)\|\to0$，$\|g(w_n)-g(z_n)\|\to0$，$\|g(z_n)-g(u_n)\|\to0$，因此当 $n\to\infty$ 时有

$$\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|\leqslant\|g(u_{n+1})-g(w_n)\|+\|g(w_n)-g(z_n)\|+\|g(z_n)-g(u_n)\|\to0$$

由于 $\{u_n\}$ 有界，因此存在 $\{u_n\}$ 的子序列 $\{u_{n_i}\}$ 满足当 $n_i\to\infty$ 时，$u_{n_i}\to\bar{u}$．因而 $n_i\to\infty$ 时，$g(u_{n_i})\to g(\bar{u})$，$g(w_{n_i})\to g(\bar{u})$，$g(z_{n_i})\to g(\bar{u})$；又由于 T 和 V 在 H 上是 H-连续的，故 T 和 V 都是 H 上紧值上半连续的．由 $x_n\in T(u_n)$ 和 $y_n\in V(u_n)$，$n\geqslant0$ 及文献[6]的命题 11.11，存在 $\{x_{n_i}\}$ 的子列 $\{x_{n_{i_j}}\}$，$\{y_{n_i}\}$ 的子列 $\{y_{n_{i_j}}\}$ 满足 $x_{n_{i_j}}\to\bar{x}$，$y_{n_{i_j}}\to\bar{y}$ $(n_{i_j}\to\infty)$，其中 $\bar{x}\in T(\bar{u})$，$\bar{y}\in V(\bar{u})$．根据(7)，$\forall g(v)\in H$，有

$$\langle\mu N(x_{n_{i_j}},y_{n_{i_j}})+\eta(g(z_{n_{i_j}}),g(u_{n_{i_j}})),\eta(g(v),g(z_{n_{i_j}}))\rangle+\mu\varphi(g(v),g(z_{n_{i_j}}))-\mu\varphi(g(z_{n_{i_j}}),g(z_{n_{i_j}}))\geqslant0\tag{21}$$

由 $N(\cdot,\cdot)$，g 和 φ 的连续性及条件(1)，在(21)中令 $n_{i_j}\to\infty$，得

$$\langle N(\bar{x}, \bar{y}), \eta(g(v), g(\bar{u}))\rangle + \varphi(g(v), g(\bar{u})) - \varphi(g(\bar{u}), g(\bar{u})) \geqslant 0 \qquad \forall g(v) \in H$$

即$(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$是问题(3)的解. 又由(10)得

$$\| g(u_{n+1}) - g(\bar{u}) \| \leqslant \| g(u_n) - g(\bar{u}) \| \qquad \forall n \geqslant 0$$

即 $n \to \infty$ 时, $g(u_n) \to g(\bar{u})$. 因为 g 可逆, 故 $n \to \infty$ 时, $u_n \to \bar{u}$. 又由 T 和 V 的 H-连续性及(7), 有

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant M(T(u_{n+1}), T(u_n)) \to 0 \qquad n \to \infty$$

于是, $\forall n > 0$, 有

$$\| x_n - \bar{x} \| \leqslant \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x_{n+2} \| + \cdots + \| x_{n_{i_j}-1} - x_{n_{i_j}} \| + \| x_{n_{i_j}} - \bar{x} \| \to 0$$

即 $n \to \infty$, $x_n \to \bar{x}$. 同理可证 $n \to \infty$, $y_n \to \bar{y}$.

参考文献:

[1] 周 彦, 邓 磊. 多值一般混合似变分不等式的可解性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(6): 952-955.

[2] Noor M A, Noor K I. Set-valued Resolvent Equations and Mixed Variational Inequalities [J]. J Math Anal Appl, 1998, 220: 741-759.

[3] Noor M A. Solvability of Multivalued General Mixed Variational Inequalities [J]. J Math Anal Appl, 2001, 261: 390-402.

[4] 羊 琴, 邓 磊. 关于 G-f-η 单调算子的完全广义非线性隐似变分包含问题[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(8): 22-27.

[5] 方长杰, 郑继民, 吴慧莲. Banach空间中一类广义集值非线性混合似变分不等式解的存在性与算法[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2007, 30(1): 40-44.

[6] Border K C. Fixed point Theorem with Applications to Economics and Game Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

A Iterative Method for Generalized Set-valued Mixed Quasi-variational Inequalities

WAN Bo[1,2], DENG Lei[2]

1. Mathematics and Statistics College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the authors suggest and study a new generalized set-valued mixed quasi-variational inequalities; using the auxiliary principle technique, they suggest and analyze a there-step prediction-correction method for solving the generalized set-valued mixed quasi-variational inequalitie; the new iterative method converges under certain mild conditions.

Key words: set-valued mixed quasi-variational inequalities; prediction-correction method; auxiliary principle technique

责任编辑 覃吉康