文章编号：1000－5471(2008)02－0039－05

弯曲时空中光源及接收器都在运动时的 Doppler 频移①

宋海珍， 吕林霞

南阳师范学院 物理与电子工程学院，河南 南阳 473061

摘要：研究一般弯曲时空中光源及接收器都在运动时的频移变化关系. 考虑一般弯曲时空中，当原子的静止质量及其变化相对于引力场中空间坐标不变时，推导出一般弯曲时空中光源及接收器运动时的 Doppler 频移公式，同时计算特殊情况下的两个例子，与现行公式一致.

关 键 词：相对论；Doppler 频移；平直时空；弯曲时空

中图分类号：O412.1 **文献标识码：A**

Doppler 频移指的是，由于波源或观察者的运动而出现观测频率与波源频率不同的现象，无论是声波或是光波的 Doppler 频移在近代科学技术领域都得到了广泛应用[1]. 从理论上如何解释 Doppler 频移，许多文献都进行过讨论[2-5]，但这些讨论都局限在 Minkowski 时空中的 Doppler 频移. 弯曲时空中静止光源发出的光频和静止接收器接收到的光频不同叫引力频移[6-8]，弯曲时空中光源和接收器都在运动时，既有引力频移，也有运动引起的 Doppler 频移，文献[9]给出了特例：脉冲星发射与接收者接收到射线的引力频移和 Doppler 频移. 然而目前尚未见到弯曲时空中光源和接收器都在运动时 Doppler 频移的一般公式，以及 Minkowski 时空到弯曲时空 Doppler 频移公式的统一. 本文探讨了一般弯曲时空中光源及接收器都在运动时的频率移动关系.

1 Minkowski 时空中光源及接收器运动引起的 Doppler 频移

在 Minkowski 时空中，普遍地讨论 Doppler 频移，涉及到 3 个惯性参照系：光源系、接收器系和某个中介系[4]，考虑到这三个参照系的时空都是彼此一样的平直时空，以中介系为桥梁，可以找到 Minkowski 时空中光源及接收器运动时的 Doppler 频移公式。假设惯性系 s' 相对于惯性系 s 以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 X 轴方向运动，在 s' 系中观察到的光频率 ω' 与 s 系中光的频率 ω 的关系是

$$\omega' = \frac{\omega - k_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

若光源静止，在对光源静止的参考系中测到光的圆频率 ω_0，有 $\omega' = \omega_0$；接收器以 v_B 沿 X 轴运动，它测得光的频率为 ω_B，光的传播方向沿 X 方向，$k_x = \frac{\omega_B}{c}$，根据(1) 式得

① 收稿日期：2007－07－04
基金项目：河南省基础与前沿技术计划资助项目(072300410490).
作者简介：宋海珍(1963－)，女，河南唐河人，副教授，主要从事相对论分析力学研究.

$$\omega_0=\frac{\omega_B\left(1-\frac{v_B}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}\qquad 则\ \omega_B=\frac{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}{1-\frac{v_B}{c}}\omega_0 \tag{2}$$

光源以 v_A 沿 X 方向运动，在对光源静止的参考系中测得光的圆频率 ω_A，且光沿 X 方向传播，$k_x=\frac{\omega_A}{c}$. 接收器静止不动，测得光的频率为 ω_0，根据(1) 式得

$$\omega_0=\frac{\omega_A\left(1-\frac{v_A}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} \tag{3}$$

光源以 v_A 沿 X 方向运动，在对光源静止的参考系中测得光的圆频率 ω_A，接收器以 v_B 沿 X 方向运动，它测得光的频率为 ω_B，综合(2)、(3) 式的讨论，以中介系为桥梁，可得到

$$\omega_B=\frac{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}{1-\frac{v_B}{c}}\omega_0=\frac{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}{1-\frac{v_B}{c}}\frac{\left(1-\frac{v_A}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\omega_A$$

或

$$v_B=\frac{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}{1-\frac{v_B}{c}}\frac{1-\frac{v_A}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}v_A \tag{4}$$

(4) 式就是 Minkowski 时空中光源及接收器运动时的 Doppler 频移公式.

2 静态引力场中引力引起的 Doppler 频移

设光源 A 和接收器 B 分别静止在静态引力场中的 A 点和 B 点，A 处的光源在坐标时刻 t_1^A 发出一个光信号，B 处的接收器在坐标时 t_1^B 收到这个信号，二坐标时刻之差 $\delta t=t_1^B-t_1^A$，然后，A 处的光源在坐标时刻 t_2^A 又发出一个光信号，此信号在 t_2^B 到达接收器 B，二坐标时刻之差 $\delta t'=t_2^B-t_2^A$，由于时空是静态的，其度规分量与坐标时无关，则有

$$\mathrm{d}t^B=t_2^B-t_1^B=t_2^A-t_1^A=\mathrm{d}t^A \tag{5}$$

其中 $\mathrm{d}t^A$ 为光源 A 发出的两个光信号的坐标时间间隔，固有时

$$\mathrm{d}\tau^A=\sqrt{g_{00}^A}\,\mathrm{d}t^A \tag{6}$$

$\mathrm{d}t^B$ 为 B 处接收器收到这两个光信号的坐标时间间隔，固有时间间隔

$$\mathrm{d}\tau^B=\sqrt{g_{00}^A}\,\mathrm{d}t^B \tag{7}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\tau^A}{\mathrm{d}\tau^B}=\frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}}\qquad 或\qquad \frac{v_B}{v_A}=\frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}} \tag{8}$$

(8) 式表明，静态引力场中各点标准钟的速度不同，从一点传到另一点的光子的频率将发生变化，也就是说，光谱线将发生紫移或红移，这种频移不是光源及接收器运动产生的，而是不同场点时空的性质发生变化引起的，是引力场引起的频移，这在 Minkowski 时空中是不可能的. 从它不使谱线加宽和分裂方面考虑，仍属于 Doppler 频移.

对真空球对称质量引力场的外部解：

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)$$

$$g_{00} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}},\ v_B = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}}} v_A$$

若在地球上接收发自太阳的光，A 点是太阳表面的一点，太阳半径 $r_A = 6.95 \times 10^8$ m，太阳质量 $M = 1.983 \times 10^{30}$ kg，B 点在地球上，相对于太阳引力场可认为 r_B 远远大于 r_A，$\frac{\Delta v}{v} \approx -\frac{GM}{c^2 r_A}$，负号说明地球上收到来自太阳的光子频率比地球上同种光子的频率要小，即频率发生红移. r_A 越小，引力场越强，频率红移的数值越大；反之，r_A 越大，引力场越弱，频率红移的数值越小. 理论计算值 $\frac{\Delta v}{v} = 2.12 \times 10^{-6}$，实验观测值 $\frac{\Delta v}{v} = (2.12 \times 10^{-6}) \times (1.05 \pm 0.05)$，观测值以 5% 的精确度与理论值符合的很好[7]. 对天狼 B 星理论值 $\frac{\Delta v}{v} = (28 \pm 1) \times 10^{-5}$ 与实验观测值 $\frac{\Delta v}{v} = (30 \pm 5) \times 10^{-5}$ 也符合的极好. 引力红移的实验室检验是：Pound 和 Rebka(1960) 用一个 γ 射线源(^{57}Fe) 放置于地面上，另一个放置于高为 22.6 m 的塔顶上进行的，这一实验的精确结果在大约 1% 的实验误差内与理论值相符[10].

3　一般弯曲时空中光源及接收器都在运动时的 Doppler 频移公式

3.1　光源以 v_A^i 运动辐射频率为 ν_A 的光子

在弯曲时空中，原子的静止质量及其变化与引力场的空间坐标无关，为简单起见，取自然单位制，在 x_A^i 处有一原子，以速度 v_A^i 运动时辐射一能量为 ε 的光子，同时静止质量由 m_2 变为 m_1，速度变为 v'^i_A，根据爱因斯坦能量－动量关系，辐射光子之前有

$$p_{A\mu}(m_2, v_A^i) p_A^\mu(m_2, v_A^i) = m_2^2 \quad \text{或} \quad g_{\mu\nu}(x_A^i) p_A^\mu(m_2, v_A^i) p_A^\nu(m_2, v_A^i) = m_2^2 \tag{9}$$

辐射光子后有

$$g_{\mu\nu}(x_A^i) p_A^\mu(m_1, v'^i_A) p_A^\nu(m_1, v'^i_A) = m_1^2 \tag{10}$$

由辐射过程中能量－动量守恒

$$p_A^\mu(m_1, v'^i_A) + \varepsilon_A^\mu = p_A^\mu(m_2, v_A^i) \tag{11}$$

其中 ε_A^μ 是光子在 x_A^i 处的四维动量，由式(11) 解出 $p_A^\mu(m_1, v'^i_A)$，代入式(10)

$$g_{\mu\nu}(x_A^i)[p_A^\mu(m_2, v_A^i) - \varepsilon_A^\mu][p_A^\nu(m_2, v_A^i) - \varepsilon_A^\nu] = m_1^2 \tag{12}$$

用(9) 式减去(12) 式得

$$2g_{\mu\nu}(x_A^i) p_A^\mu(m_2, v_A^i) \varepsilon_A^\nu - g_{\mu\nu}(x_A^i) \varepsilon_A^\mu \varepsilon_A^\nu = m_2^2 - m_1^2 \tag{13}$$

由于光子静止质量为零，所以 $g_{\mu\nu}(x_A^i) \varepsilon_A^\mu \varepsilon_A^\nu = 0$，再假设辐射沿 x^1 方向，则 ε_A^ν 中只有 ε_A^0 和 ε_A^1 两个分量不为零，由(13) 式得到

$$\nu_A = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2[g_{\mu 0}(x_A^i) + g_{\mu 1}(x_A^i)] p_A^\mu(m_2, v_A^i)} \tag{14}$$

3.2　接收器以 v_B^i 运动接收到同一光子的频率 ν_B

设另一原子在 x_B^i 处以速度 v_B^i 运动，吸收这一光子后静止质量由 m_1 变为 m_2(这对应于原子静止质量及其变化相对于引力场中空间坐标的不变性)

吸收光子前

$$g_{\mu\nu}(x_B^i) p_B^\mu(m_1, v_B^i) p_B^\nu(m_1, v_B^i) = m_1^2 \tag{15}$$

吸收光子后

$$g_{\mu\nu}(x_B^i) p_B^\mu(m_2, v'^i_B) p_B^\nu(m_2, v'^i_B) = m_2^2 \tag{16}$$

吸收过程中能量－动量守恒

$$p_B^\mu(m_1, v_B^i) = p_B^\mu(m_2, v'^i_B) - \varepsilon_B^\mu \tag{17}$$

将(17) 式代入(15) 式得

$$g_{\mu\nu}(x_{\mathrm{B}}^{i})[p_{\mathrm{B}}^{\mu}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})-\varepsilon_{\mathrm{B}}^{\mu}][p_{\mathrm{B}}^{\nu}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})-\varepsilon_{\mathrm{B}}^{\nu}]=m_{1}^{2} \tag{18}$$

用(16)式减去(18)式得

$$2g_{\mu\nu}(x_{\mathrm{B}}^{i})p_{\mathrm{B}}^{\mu}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})\varepsilon_{\mathrm{B}}^{\nu}-g_{\mu\nu}(x_{\mathrm{B}}^{i})\varepsilon_{\mathrm{B}}^{\mu}\varepsilon_{\mathrm{B}}^{\nu}=m_{2}^{2}-m_{1}^{2} \tag{19}$$

由于光子静止质量为零，再假设吸收沿 x^{1} 方向，则由(19)式得到

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{m_{2}^{2}-m_{1}^{2}}{2[g_{\mu0}(x_{\mathrm{B}}^{i})+g_{\mu1}(x_{\mathrm{B}}^{i})]p_{\mathrm{B}}^{\mu}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})} \tag{20}$$

3.3 一般弯曲时空中的 Doppler 频移公式

原子静止质量及其变化相对于引力场中空间坐标具有不变性，联立(14)式和(20)式，有

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{[g_{\mu0}(x_{\mathrm{A}}^{i})+g_{\mu1}(x_{\mathrm{A}}^{i})]p_{\mathrm{A}}^{\mu}(m_{2},v_{\mathrm{A}}^{i})}{[g_{\mu0}(x_{\mathrm{B}}^{i})+g_{\mu1}(x_{\mathrm{B}}^{i})]p_{\mathrm{B}}^{\mu}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})}v_{\mathrm{A}} \tag{21}$$

其中 $p_{\mathrm{A}}^{\mu}(m_{2},v_{\mathrm{A}}^{i})$，$p_{\mathrm{B}}^{\mu}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})$ 分别是光源和接收器的四动量

$$p^{0}=\frac{m}{\sqrt{1-v^{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}-\frac{g_{0i}v^{i}}{g_{00}}\right),\ p^{i}=\frac{mv^{i}}{\sqrt{1-v^{2}}} \tag{22}$$

(21)式就是弯曲时空中光源和接收器都运动时的 Doppler 频移公式，它包含有度规、光源和接收器的四动量，因此一般地说，频移依赖于引力场源参量和运动物体的参量，在实际测量时，要区分是引力场或是光源和接收器运动对频率的贡献是不可能的. 可以证明，引力场产生的频移等效于加速场产生的相对论速度引起的 Doppler 频移[7]，目前人们只能在静态引力场中把光源及接收器静止时的理论计算结果与实验值进行比较验证.

4 一般弯曲时空中 Doppler 频移公式的应用

4.1 对于 Minkowski 时空

$$\mathrm{d}s^{2}=G_{\mu\nu}\mathrm{d}X^{\mu}\mathrm{d}X^{\nu}=(cT)^{2}-X^{2}-Y^{2}-Z^{2} \tag{23}$$

将(23)式代入(21)式

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{p_{\mathrm{A}}^{0}(m_{2},v_{\mathrm{A}}^{i})-p_{\mathrm{A}}^{1}(m_{2},v_{\mathrm{A}}^{i})}{p_{\mathrm{B}}^{0}(m_{2},v_{\mathrm{B}}^{i})-p_{\mathrm{B}}^{1}(m_{2},v_{\mathrm{B}}^{i})}v_{\mathrm{A}} \tag{24}$$

若光源以 v_{A} 沿 X 运动，接收器以 v_{B} 沿 X 轴运动，根据(22)式

$$p_{\mathrm{A}}^{0}(m_{2},v_{\mathrm{A}}^{i})=\frac{m_{2}}{\sqrt{1-v_{\mathrm{A}}^{2}}},\ p_{\mathrm{A}}^{1}(m_{2},v_{\mathrm{A}}^{i})=\frac{m_{2}v_{\mathrm{A}}}{\sqrt{1-v_{\mathrm{A}}^{2}}} \tag{25}$$

$$p_{\mathrm{B}}^{0}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})=\frac{m_{2}}{\sqrt{1-v_{\mathrm{B}}^{2}}},\ p_{\mathrm{B}}^{1}(m_{2},v'^{i}_{\mathrm{B}})=\frac{m_{2}v_{\mathrm{B}}}{\sqrt{1-v_{\mathrm{B}}^{2}}} \tag{26}$$

将(25)式和(26)式代入(24)式

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{\sqrt{1-v_{\mathrm{B}}^{2}}}{1-v_{\mathrm{B}}}\frac{1-v_{\mathrm{A}}}{\sqrt{1-v_{\mathrm{A}}^{2}}}v_{\mathrm{A}} \tag{27}$$

把(27)式的自然单位还原，正是 Lorentz 时空变换下的 Doppler 频移公式(4)，说明了(21)式的正确性.

4.2 对于静态时空中光源和接收器都静止的情况

静态时空中有，$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}=0$，$g_{0i}=0$，光源和接收器都静止，$v_{\mathrm{A}}^{i}=0$，$v_{\mathrm{B}}^{i}=0$. 根据(22)式得

$$p_{\mathrm{A}}^{0}=\frac{m_{2}}{\sqrt{g_{00}^{\mathrm{A}}}},\ p_{\mathrm{A}}^{i}=0 \tag{28}$$

$$p_{\mathrm{B}}^{0}=\frac{m_{2}}{\sqrt{g_{00}^{\mathrm{B}}}},\ p_{\mathrm{B}}^{i}=0 \tag{29}$$

将(28)式和(29)式代入(21)式

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{\sqrt{g_{00}^{\mathrm{A}}}}{\sqrt{g_{00}^{\mathrm{B}}}}v_{\mathrm{A}} \tag{30}$$

(30) 式与静态引力场中引力引起的 Doppler 频移公式(8) 相同，说明(21) 式的正确性.

5　结　　论

1) Minkowski 时空中光源及接收器运动时的 Doppler 频移由(4)式给出；

2) 静态球对称引力场中引力引起的 Doppler 频移与引力场的强弱有关，引力场越强，频率的红移越大；

3) 一般弯曲时空中的 Doppler 频移既与引力场源的参量有关，也和光源及接收器的运动有关.

参考文献：

[1] 刘战存. 多普勒和多普勒效应的起源 [J]. 物理，2003，32(7)：488－491.

[2] Huang Young-sea，Lu Kang-hao. Formulation of the classical and the relativistic Doppler effect by a systematic method [J]. Canadian journal of Physics，2004，82(11)：964－957.

[3] 魏国柱，李　林，杜　安. 普通情况下的多普勒效应表达式 [J]. 东北大学学报(自然科学版)，2004，25(6)：602.

[4] 赵凯华. 不同参考系中多普勒效应公式的统一 [J]. 大学物理，2006，25(7)：1－3.

[5] 陈光平，祝恒江. 多普勒效应公式的系统推导方法 [J]. 广西物理，2005，26(4)：41－43.

[6] 王永久. 引力论和宇宙论 [M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2004：197－266.

[7] 王永久. 空间、时间和引力 [M]. 长沙：湖南教育出版社，1993：144－157.

[8] 赵　峥. 黑洞的热性质与时空的奇异性 [M]. 北京：高教出版社，1999：1－8.

[9] 费保俊，肖　昱，孙维瑾，等. XNAV 中的相对论效应(Ⅰ)——引力频移和 Doppler 频移 [J]装甲兵工程学院学报，2006，20(4)：91－95.

[10] 瓦尼安 H C，鲁菲尼 R. 引力与时空 [M]. 向守平，冯珑珑，译. 北京：科学出版社，2006：137－145.

The Doppler Frequency Deviation When the Illuminant and the Receiving Set Moving in the Curved Space-time

SONG Hai-zhen，　LV Lin-xia

Department of Physics，Nanyang Normal University，Nanyang Henan 473061，China

Abstract：The authors research the Doppler frequency deviation when the illuminant and the receiving set are moving in the curved space-time. In the curved space-time，when the atomic motionless mass and its change is invariable according to the space coordinate，the formula of the Doppler frequency deviation is deduced in the course of the illuminator and receiving set moving. Two examples of the special situation are given to show the use of the formula of the Doppler frequency deviation，which is consistent each other.

Key words：relativity；Doppler frequency deviation；straightness space-time；curved space-time

责任编辑　潘春燕