第 33 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2008 年 4 月
Vol. 33 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2008

文章编号: 1000-5471(2008)02-0019-03

弱阻尼谐振子的波函数①

李体俊

菏泽学院 物理系,山东 菏泽 274015

摘要: 写出阻尼谐振子的哈密顿函数,对其直接量子化,用分离变量法得出了薛定谔方程的解.

关 键 词: 阻尼谐振子;哈密顿函数;薛定谔方程;分离变量;波函数

中图分类号: O413.1 **文献标识码:** A

在经典力学中,当一个谐振子受到与速度的一次方成正比的阻力时,其动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

其中 m,c,k 分别为振子的质量、阻尼力与速度的比值、恢复力与振子位移的比值.

取广义坐标[1-3] $X = x\mathrm{e}^{ct/2m}$,阻尼谐振子的拉格郎日函数

$$L = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 - \frac{c}{2}X\dot{X} + \frac{1}{8m}(c^2 - 4mk)X^2 \tag{2}$$

广义动量

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\dot{X} - \frac{c}{2}X \tag{3}$$

反解出

$$\dot{X} = \frac{P}{m} + \frac{c}{2m}X \tag{4}$$

哈密顿函数

$$\begin{aligned} H &= (-L + P\dot{X})_{(X,\dot{X})\to(X,P)} \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{c}{4m}(XP + PX) + \frac{1}{2}kX^2 \end{aligned} \tag{5}$$

对应的哈密顿算符[4]

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{c}{4m}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}) + \frac{1}{2}k\hat{X}^2 \tag{6}$$

这样保证了 $\hat{H}$ 为厄米算符. 用坐标算符 $\hat{X} = X$ 和动量算符 $\hat{P} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial X}$ [5-6] 代入,得

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{ic\hbar}{2m}X\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}kX^2 - \frac{ic\hbar}{4m}$$

薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(X,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{ic\hbar}{2m}X\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}kX^2 - \frac{ic\hbar}{4m}\right)\varphi(X,t) \tag{7}$$

观察(7)式,明显可用分离变量法求解. 设波函数

$$\varphi(X,t) = \phi(X)f(t) \tag{8}$$

代入(7)式,再用 $\varphi(X,t)$ 除以等式两边,便得到

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi(X)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}X^2} - \frac{i\hbar c}{2m}X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} + \frac{1}{2}kX^2 - \frac{ic\hbar}{4m}\right)\phi(X) = E \tag{9}$$

① 收稿日期:2007-04-03

作者简介:李体俊(1964-),男,山东定陶人,副教授,主要从事理论物理的教学和研究.

其中 E 是不依赖变量 X 和 t 的常数. 从(9) 式得

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=E \tag{10}$$

$$\frac{1}{\phi(X)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}X^2}-\frac{i\hbar c}{2m}X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}+\frac{1}{2}kX^2-\frac{ic\hbar}{4m}\right)\phi(X)=E \tag{11}$$

整理(11) 式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}X^2}+\frac{ic}{\hbar}X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}-\frac{mk}{\hbar^2}X^2+\frac{2mE}{\hbar^2}+\frac{ic}{2\hbar}\right)\phi(X)=0 \tag{12}$$

这个方程式在 X 有限的区域内没有奇点，只需考虑它的解在 X 趋于无限远时的行为. 在 $|X|\rightarrow\infty$ 时，上式中常量 $\frac{2mE}{\hbar^2}+\frac{ic}{2\hbar}$ 可以略去，(12) 式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}X^2}+\frac{ic}{\hbar}X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}-\frac{mk}{\hbar^2}X^2\right)\phi(X)=0,\ \text{当}\ |X|\rightarrow\infty \tag{13}$$

假定它的渐近解可表示为

$$\phi(X)=B\mathrm{e}^{AX^2} \tag{14}$$

代入(13) 式得

$$\left(2A^2+\frac{ic}{\hbar}A-\frac{mk}{2\hbar^2}\right)X^2\mathrm{e}^{AX^2}=0,\ \text{当}\ |X|\rightarrow\infty$$

所以

$$2A^2+\frac{ic}{\hbar}A-\frac{mk}{2\hbar^2}=0$$

$$A_{\pm}=\frac{1}{4}\left(-\frac{ic}{\hbar}\pm\sqrt{\left(\frac{ic}{\hbar}\right)^2+\frac{4mk}{\hbar^2}}\right)=\frac{m}{2\hbar}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}-\frac{ic}{2m}\right) \tag{15}$$

在阻尼不足($c^2<4mk$)的情况下，令

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}} \tag{16}$$

考虑到 $\phi(X)$ 在 $|X|\rightarrow\infty$ 时收敛，A 只能取 A_-，即

$$A=\frac{m}{2\hbar}\left(-\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}-\frac{ic}{2m}\right)=-\frac{m}{2\hbar}\left(\omega+\frac{ic}{2m}\right) \tag{17}$$

(13) 式的渐近解可表示为

$$\phi(X)=B\mathrm{e}^{-\frac{m}{2\hbar}\left(\omega+\frac{ic}{2m}\right)X^2},\quad \text{当}\ |X|\rightarrow\infty$$

于是，应当设(12) 式的解为

$$\phi(X)=u(X)\mathrm{e}^{-\frac{m}{2\hbar}\left(\omega+\frac{ic}{2m}\right)X^2} \tag{18}$$

将(18) 式代入(12) 式，化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}X^2}-\frac{2m}{\hbar}\omega X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}+\frac{2mE}{\hbar^2}u-\frac{m\omega}{\hbar}u=0 \tag{19}$$

令

$$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{20}$$

$$\xi=\alpha X \tag{21}$$

$$\lambda=\frac{2E}{\omega\hbar} \tag{22}$$

(19) 式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-2\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+(\lambda-1)u=0 \tag{23}$$

为了使上式的解满足平方可积的条件，要求[7]

$$\lambda=2n+1,\ n=0,1,2,3,\cdots \tag{24}$$

$$u=H_n(\xi)=H_n(\alpha X) \tag{25}$$

(24) 式代入(22) 式得

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0,1,2,3,\cdots \tag{26}$$

(25) 式代入(18) 式得

$$\phi(X) = u(X)e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega+\frac{ic}{2m})X^2} = H_n(\alpha X)e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega+\frac{ic}{2m})X^2} \tag{27}$$

方程(10) 式的解

$$f(t) = De^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \tag{28}$$

(27) 式和(28) 式代入(8) 式，得广义坐标表象中的波函数

$$\varphi_n(X,t) = N_n H_n(\alpha X)e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega+\frac{ic}{2m})X^2} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \tag{29}$$

式中 $N_n = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n \cdot n!}}$ 为归一化常数.

广义坐标算符 $\hat{X}$ 的本征方程

$$\hat{X} \mid X'\rangle = X' \mid X'\rangle \tag{30}$$

把 $\hat{X} = \hat{x}e^{\frac{ct}{2m}}$ 代入上式得

$$\hat{x} \mid X'\rangle = X'e^{-\frac{ct}{2m}} \mid X'\rangle$$

坐标表象中算符 $\hat{X}$ 的归一化本征函数

$$\langle x \mid X'\rangle = e^{-\frac{ct}{4m}}\delta(x - e^{-\frac{ct}{2m}}X') \tag{31}$$

阻尼谐振子在坐标表象中的波函数

$$\psi_n(x,t) = \langle x \mid n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle x \mid X'\rangle\langle X' \mid n\rangle dX'$$

$$= N_n H_n(\alpha x e^{\frac{ct}{2m}})e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega+\frac{ic}{2m})x^2 e^{\frac{ct}{m}}} \cdot e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \cdot e^{\frac{ct}{4m}} \tag{32}$$

当 $c = 0$ 时，上式自然地退化为无阻尼谐振子的波函数.

参考文献：

[1] Gzyl H. Quantization of the damped harmonic oscillator [J]. Phys Rev A, 1983, 27(5):2297－2299.

[2] 彭桓武. 阻尼谐振子的量子力学处理 [J]. 物理学报, 1980, 29(8): 1084－1089.

[3] 王德雄, 饶玉英. 轻阻尼振子阻尼现象的量子力学处理 [J]. 大学物理, 1998, 17(1): 14－171.

[4] 侯邦品. 广义含谐振子的含时粒子数表象及绝热量子相位和绝热含时相干态 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1999, 22(3): 311－314.

[5] 王正行. 量子力学原理 [M]. 北京:北京大学出版社, 2003: 43－53.

[6] 邹鹏程. 量子力学 [M]. 第 2 版. 北京:高等教育出版社, 2003: 179－184 .

[7] 关　洪. 量子力学基础 [M]. 北京:高等教育出版社, 1999: 51－56.

The Wave Functions of a Light-Damping Oscillator

LI Ti-jun

Department of Physics, Heze University, Heze 274015, China

Abstract: The Schrödinger equation is given directly from the classical Hamiltonian function of a damping harmonic oscillator, and its solution is obtained by the separation of variables.

Key words: damping harmonic oscillator; Hamiltonian function; Schrödinger equation; separation of variables; wave functions

责任编辑　潘春燕