文章编号：1000-5471(2008)01-0018-04

权分担三个集合的亚纯函数的唯一性[①]

李季龙， 史仲春

重庆大学 数理学院，重庆 400030

摘要：利用权分担集合的思想讨论了关于分担三个集合的亚纯函数的唯一性问题. 证明了：设 f 与 g 是开平面上两个非常数亚纯函数，$k_i(i=1,2,3)$ 为非负整数，n 为不小于 2 的整数. 若

$$E_{k_1}(\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^n\}, f) = E_{k_1}(\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^n\}, g)$$

$$E_{k_2}(\{0\}, f) = E_{k_2}(\{0\}, g)$$

$$E_{k_3}(\{\infty\}, f) = E_{k_3}(\{\infty\}, g)$$

且 a,b,c,n 满足 $(an-a-2)(bcn-b-c) > 2bcn$，其中 $k_1+1=a$，$k_2+1=b$，$k_3+1=c$，则 $f \equiv tg$ $(t^n=1)$；或 $fg \equiv s$ $(s^n=1)$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

关 键 词：亚纯函数；唯一性；权分担

中图分类号：O174.52 **文献标识码**：A

许多数学工作者对亚纯函数分担三个集合的问题进行研究，得到了一系列唯一性结论. 1988 年，文献[1]，文献[2] 分别独立地证明了定理 A.

定理 A 设 f 与 g 为开平面上两个非常数亚纯函数，若 f 与 g CM 分担集合 $S_j(j=1,2,3)$，若 $n \geqslant 2$，则 $f \equiv tg$，其中 $t^n=1$，或 $fg \equiv s$，其中 $s^n=1$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

1991 年，文献[3] 改进了定理 A，证明了定理 B.

定理 B 设 f 与 g 为开平面上两个非常数亚纯函数，若 f 与 g CM 分担集合 S_1,S_2，且 IM 分担集合 S_3，若 $n \geqslant 2$，则 $f \equiv tg$，其中 $t^n=1$，或 $fg \equiv s$，其中 $s^n=1$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

1997 年，文献[4] 改进了上述定理，证明了如下 4 个定理.

定理 C 设 f 与 g 为开平面上两个非常数亚纯函数，若 f 与 g CM 分担集合 S_1,S_3，且 IM 分担集合 S_2，若 $n \geqslant 2$，则 $f \equiv tg$，其中 $t^n=1$，或 $fg \equiv s$，其中 $s^n=1$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

定理 D 设 f 与 g 为开平面上两个非常数亚纯函数，若 f 与 g CM 分担集合 S_1，且 IM 分担集合 S_2,S_3，若 $n \geqslant 3$，则 $f \equiv tg$，其中 $t^n=1$，或 $fg \equiv s$，其中 $s^n=1$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

定理 E 设 f 与 g 为开平面上两个非常数亚纯函数，若 f 与 g CM 分担集合 S_2，且 IM 分担集合 S_1,S_3，若 $n \geqslant 6$，则 $f \equiv tg$，其中 $t^n=1$，或 $fg \equiv s$，其中 $s^n=1$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

定理 F 设 f 与 g 为开平面上两个非常数亚纯函数，若 f 与 g CM 分担集合 S_3，且 IM 分担集合 S_1,S_2，若 $n \geqslant 6$，则 $f \equiv tg$，其中 $t^n=1$，或 $fg \equiv s$，其中 $s^n=1$，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

本文在已有工作的基础上，利用文献[5] 中权分担思想考虑了 f 与 g 分担集合的唯一性问题.

文中所用记号均为值分布论中的标准记号：$T(r, f)$，$N(r, f)$，$m(r, f)$，$\cdots$.

设 $S_1=\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^n\}$，$S_2=\{0\}$，$S_3=\{\infty\}$，其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$n$ 为不小于 2 的整数.

---

① 收稿日期：2007-05-09
作者简介：李季龙(1981-)，男，江苏海安人，硕士研究生，主要从事复分析的研究.

定义　设 k 是一个非负整数，F 与 G 是两个非常数亚纯函数，且满足 $E_k(1, F) = E_k(1, G)$. 设 z_0 为 F 的 p 重 1 值点，为 G 的 q 重 1 值点. $\overline{N}_L\left(r, \dfrac{1}{F-1}\right)$表示 F 的重级大于 G 的重级的 1 值点的密指量，且每一个 1 值点的密指量仅计一次，此时 $p > q \geqslant k+1$.

类似可以定义 $\overline{N}_L\left(r, \dfrac{1}{G-1}\right)$, $\overline{N}_L\left(r, \dfrac{1}{F}\right)$, $\overline{N}_L\left(r, \dfrac{1}{G}\right)$, $\overline{N}_L(r, F)$, $\overline{N}_L(r, G)$.

引理 1　设 F,G 为开平面上的非常数亚纯函数，若 $E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G)$，其中 k_1 为非负整数，则

$$\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) \leqslant \frac{1}{k_1+1}\left\{\overline{N}(r, F) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)\right\} + S(r, F) \tag{1}$$

$$\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right) \leqslant \frac{1}{k_1+1}\left\{\overline{N}(r, G) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{G}\right)\right\} + S(r, G) \tag{2}$$

证　由 $E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G)$，有

$$\begin{aligned}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) &\leqslant \frac{1}{k_1+1} N\left(r, \frac{F}{F'}\right) \leqslant \frac{1}{k_1+1} T\left(r, \frac{F'}{F}\right) + O(1) \\ &\leqslant \frac{1}{k_1+1}\left\{\overline{N}(r, F) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)\right\} + S(r, F)\end{aligned}$$

同理，可以证明(2) 式，则引理证明完毕.

引理 2　设

$$V_1 = \frac{F'}{F-1} - \frac{G'}{G-1} \tag{3}$$

$$F = f^n \qquad G = g^n \tag{4}$$

其中 f 与 g 为开平面上的非常数亚纯函数，且 n 为不小于 2 的整数. 若 $E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G)$, $E_{nk_3}(\infty, F) = E_{nk_3}(\infty, G)$，$k_1$,$k_3$ 均为非负整数，且 V_1 不恒等于零，则

$$N(r, V_1) \leqslant \overline{N}_L(r, F) + \overline{N}_L(r, G) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right) \tag{5}$$

证　由 $E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G)$, $E_{nk_3}(\infty, F) = E_{nk_3}(\infty, G)$ 及(3) 式，可得 V_1 的极点只可能从 F 与 G 重级不相同的 1 值点和 F 与 G 重级不相同的极点中产生，且 V_1 的极点均为单极点，则引理证明完毕.

引理 3　设

$$V_2 = \left(\frac{F'}{F-1} - \frac{F'}{F}\right) - \left(\frac{G'}{G-1} - \frac{G'}{G}\right) \tag{6}$$

若 F,G 如(4) 式所设，$E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G)$, $E_{nk_2}(0, F) = E_{nk_2}(0, G)$，$k_1$,$k_2$ 均为非负整数，且 V_2 不恒等于零，则

$$N(r, V_2) \leqslant \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right) \tag{7}$$

证　由 $E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G)$, $E_{nk_2}(0, F) = E_{nk_2}(0, G)$ 及(6) 式，可得 V_2 的极点只可能从 F 与 G 重级不相同的 1 值点和 F 与 G 重级不相同的零点中产生，且 V_2 的极点均为单极点，则引理证明完毕.

定理 1　设 f 与 g 是开平面上两个非常数亚纯函数，若 $E_{k_1}(S_1, f) = E_{k_1}(S_1, g)$, $E_{k_2}(S_2, f) = E_{k_2}(S_2, g)$, $E_{k_3}(S_3, f) = E_{k_3}(S_3, g)$，其中 $k_i (i = 1,2,3)$ 为非负整数，n 为不小于 2 的整数，且 a,b,c,n 满足 $(an-a-2)(bcn-b-c) > 2bcn$，其中 $k_1+1 = a$, $k_2+1 = b$, $k_3+1 = c$，则 $f \equiv tg$ $(t^n = 1)$；或 $fg \equiv s$ (其中 $s^n = 1$)，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值.

证　F,G 如(4) 式所设，若 $F \equiv G$，则当 $t^n = 1$ 时，有 $f \equiv tg$，则定理 1 得证. 若 F 不恒等于 G，有

$$V_1 \not\equiv 0 \qquad V_2 \not\equiv 0 \tag{8}$$

由 $E_{k_1}(S_1, f) = E_{k_1}(S_1, g)$, $E_{k_2}(S_2, f) = E_{k_2}(S_2, g)$, $E_{k_3}(S_3, f) = E_{k_3}(S_3, g)$ 及(4) 式有

$$E_{k_1}(1, F) = E_{k_1}(1, G) \tag{9}$$

$$E_{nk_2}(0, F) = E_{nk_2}(0, G) \tag{10}$$

$$E_{nk_3}(\infty, F) = E_{nk_3}(\infty, G) \tag{11}$$

再根据文献[6]的定理2.18，有 $S(r, F) = S(r, G)$. 为计算方便，记 $S(r) = S(r, F) = S(r, G)$.

根据(10)式，从 F 与 G 重级不相同的零点中任意取一个零点，不妨设为 z_0. 设 z_0 为 F 的 p 重零点，为 G 的 q 重零点，若 $p > q$，则 $p > q \geqslant (k_2+1)n$；若 $q > p$，则 $q > p \geqslant (k_2+1)n$. 所以，z_0 至少为 F 与 G 的 $(k_2+1)n$ 重零点，再由(3)式，得出 z_0 至少为 V_1 的 $(k_2+1)n-1$ 重零点，于是有

$$\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G}\right) \leqslant \frac{1}{(k_2+1)n-1} N(r, V_1) + S(r, F) + S(r, G) \tag{12}$$

由(8),(9),(11),(12)及引理2，有

$$\begin{aligned}&\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G}\right) \\ \leqslant & \frac{1}{(k_2+1)n-1}\left\{\overline{N}_L(r, F) + \overline{N}_L(r, G) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right)\right\} + S(r)\end{aligned} \tag{13}$$

同理，由(6)及(11)式，有

$$\overline{N}_L(r, F) + \overline{N}_L(r, G) \leqslant \frac{1}{(k_3+1)n-1} N(r, V_2) + S(r, F) + S(r, G) \tag{14}$$

由(8)－(10),(14)及引理3，有

$$\begin{aligned}&\overline{N}_L(r, F) + \overline{N}_L(r, G) \\ \leqslant & \frac{1}{(k_3+1)n-1}\left\{\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right)\right\} + S(r)\end{aligned} \tag{15}$$

结合(13),(15)式，有

$$\begin{aligned}&\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G}\right) \\ \leqslant & \frac{k_3+1}{(k_2+1)(k_3+1)n-(k_2+k_3+2)}\left\{\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right)\right\} + S(r)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\overline{N}_L(r, F) + \overline{N}_L(r, G) \\ \leqslant & \frac{k_2+1}{(k_2+1)(k_3+1)n-(k_2+k_3+2)}\left\{\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right)\right\} + S(r)\end{aligned} \tag{17}$$

由(1),(2),(5),(8)－(11),(17)及文献[4]的引理5，有

$$\begin{aligned}&\left\{n-1-\frac{2(k_2+1)(k_3+1)n-2(k_3+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)n-(k_1+1)(k_2+k_3+2)}\right\} \times \overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) \\ \leqslant & \frac{2(k_2+1)(k_3+1)n-2(k_3+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)n-(k_1+1)(k_2+k_3+2)} \overline{N}(r, F) + S(r)\end{aligned} \tag{18}$$

由(1),(2),(7)－(11),(16)及文献[4]的引理8，有

$$\begin{aligned}&\left\{n-1-\frac{2(k_2+1)(k_3+1)n-2(k_2+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)n-(k_1+1)(k_2+k_3+2)}\right\} \times \overline{N}(r, F) \\ \leqslant & \frac{2(k_2+1)(k_3+1)n-2(k_2+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)n-(k_1+1)(k_2+k_3+2)} \overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + S(r)\end{aligned} \tag{19}$$

结合(18),(19)两式，有

$$\left\{n-1-\frac{4(k_2+1)(k_3+1)n-2(k_2+k_3+2)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)n-(k_1+1)(k_2+k_3+2)}\right\} \times \left\{\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}(r, F)\right\} \leqslant S(r) \tag{20}$$

令 $k_1+1=a$, $k_2+1=b$, $k_3+1=c$，则(20)式可化简为

$$\{(an-a-2)(bcn-b-c)-2bcn\} \times \left\{\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}(r, F)\right\} \leqslant S(r)$$

若 a, b, c, n 满足 $(an-a-2)(bcn-b-c) > 2bcn$，可以得到文献[4]的引理10，则定理1证明完毕.

注 由定理1，当 $k_i (i=1,2,3)$ 分别取具体的值时，可以得到如下结论：

若 $E_6(S_1, f) = E_6(S_1, g)$, $E_5(S_2, f) = E_5(S_2, g)$, $\overline{E}(S_3, f) = \overline{E}(S_3, g)$，且 $n \geqslant 2$，则 $f \equiv tg$ $(t^n = 1)$，或 $fg \equiv s$ $(s^n = 1)$，且0和∞为 f 与 g 的缺省值. 改进了定理B；

若 $E_6(S_1, f)=E_6(S_1, g)$，$\overline{E}(S_2, f)=\overline{E}(S_2, g)$，$E_5(S_3, f)=E_5(S_3, g)$，且 $n\geqslant 2$，则 $f\equiv tg$ ($t^n=1$)，或 $fg\equiv s$ (其中 $s^n=1$)，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值. 改进了定理 C；

若 $E_4(S_1, f)=E_4(S_1, g)$，$\overline{E}(S_2, f)=\overline{E}(S_2, g)$，$\overline{E}(S_3, f)=\overline{E}(S_3, g)$，且 $n\geqslant 3$，则 $f\equiv tg$ ($t^n=1$)，或 $fg\equiv s$ (其中 $s^n=1$)，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值. 改进了定理 D；

若 $\overline{E}(S_1, f)=\overline{E}(S_1, g)$，$E_1(S_2, f)=E_1(S_2, g)$，$\overline{E}(S_3, f)=\overline{E}(S_3, g)$，且 $n\geqslant 6$，则 $f\equiv tg$ ($t^n=1$)，或 $fg\equiv s$ ($s^n=1$)，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值. 改进了定理 E；

若 $\overline{E}(S_1, f)=\overline{E}(S_1, g)$，$\overline{E}(S_2, f)=\overline{E}(S_2, g)$，$E_1(S_3, f)=E_1(S_3, g)$，且 $n\geqslant 6$，则 $f\equiv tg$($t^n=1$)，或 $fg\equiv s$ ($s^n=1$)，且 0 和 ∞ 为 f 与 g 的缺省值. 改进了定理 F.

致谢：作者感谢李江涛老师的指导和帮助.

参考文献：

[1] Yi Hong-xun. On the uniqueness of meromorphic functions [J]. Acta Math Sinica, 1988, 31: 570－576.
[2] Tohge K. Meromorphic functions covering certain finite sets at the same points [J]. Kodai Math, 1988, 11: 249－279.
[3] Jank G, Terglane N. Meromorphic functions sharing three values [J]. Math Pannon, 1991, 2: 37－46.
[4] Yi Hong-xun. Meromorphic functions that share three sets [J]. Kodai Math, 1997, 20: 22－32.
[5] Indajit Lahiri. Weighted Sharing and uniqueness of meromorphic functions [J]. Nagoya Math J, 2001, 161: 193－206.
[6] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京：科学出版社，1995.

Uniqueness of Meromorphic Functions Weighed Sharing Three Sets

LI Ji-long，　SHI Zhong-chun

College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China

Abstract: Using the idea of weighted sharing, deal with the uniqueness problems on meromorphic functions that sharing three sets. Mainly the authors proved the following results: Let f and g be two meromorphic functions, k_i ($i=1,2,3$) be non-negative integers, n be an integer not less than 2, and $(an-a-2)(bcn-b-c)>2bcn$ where $k_1+1=a$, $k_2+1=b$, $k_3+1=c$, then $f\equiv tg$ where $t^n=1$ or $fg\equiv s$ where 0 and ∞ are lacunary values of f and g, and $s^n=1$.

Key words: meromorphic functions; uniqueness; weighted sharing

责任编辑　覃吉康