文章编号：1000-5471(2008)01-0001-04

关于不定方程 $x^3+27=26y^2$ ①

李双娥

重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047

摘要： 利用递归数列、同余式和平方剩余证明了不定方程 $x^3+27=26y^2$ 仅有整数解 $(-3, 0)$，$(-1, \pm 1)$，$(719, \pm 3781)$.

关 键 词： 不定方程；整数解；递归数列；平方剩余

中图分类号： O156.1 **文献标识码：** A

关于不定方程 $x^3 \pm 27 = Dy^2(D>0)$，当 D 无 $6k+1$ 形状的素数的奇次幂因子时，其全部解已由文献[1]得到. 但当 D 有 $6k+1$ 形状的素因数时，方程的求解较为困难. 文献[2]证明了 $x^3-27=7y^2$ 仅有平凡解. 本文利用递归数列、同余式和平方剩余证明了不定方程 $x^3+27=26y^2$ 仅有整数解 $(-3, 0)$，$(-1, \pm 1)$，$(719, \pm 3781)$.

引理 1[3] 不定方程 $x^3+1=78y^2$ 仅有整数解 $(x, y)=(-1, 0)$.

定理 1 不定方程

$$x^3+27=26y^2 \tag{1}$$

仅有整数解 $(-3, 0)$，$(-1, \pm 1)$，$(719, \pm 3781)$.

证 当 $3 \mid x$ 时，可知 $9 \mid y$，设 $x=3x_1$，$y=9y_1$，则(1)化为 $x_1^3+1=78y_1^2$，由引理 1 知 $x_1=-1$，$y_1=0$，故 $x=-3$，$y=0$.

当 $3 \nmid x$ 时，将方程(1)化为 $(x+3)(x^2-3x+9)=26y^2$，易知 $(x+3, x^2-3x+9)=1$，且 $2 \nmid (x^2-3x+9)$，故不定方程(1)有下列两种可能的分解：

情形 Ⅰ $x+3=26u^2$，$x^2-3x+9=v^2$，$y=uv$；

情形 Ⅱ $x+3=2u^2$，$x^2-3x+9=13v^2$，$y=uv$.

以下分别讨论这两种情形所给出的(1)的整数解：

情形 Ⅰ 由 $x^2-3x+9=v^2$ 得 $(2x-3)^2-(2v)^2=-27$，解得 $x=-5, 8, 0, 3$，均不满足 $x+3=26u^2$，故该情形无不定方程(1)的解.

情形 Ⅱ 将 $x^2-3x+9=13v^2$ 化为 $(2x-3)^2-13(2v)^2=-27$. 由文献[4]容易知道，方程 $x^2-13y^2=-27$ 的全部整数解由以下 4 个非结合类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{13}=\pm(5+2\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(5+2\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,\ n\in Z \tag{2}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{13}=\pm(-5+2\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(-5+2\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,\ n\in Z \tag{3}$$

$$x_n'+y_n'\sqrt{13}=\pm(21+6\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(21+6\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,\ n\in Z \tag{4}$$

$$\bar{x}_n'+\bar{y}_n'\sqrt{13}=\pm(-21+6\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(-21+6\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,\ n\in Z \tag{5}$$

其中 $649+180\sqrt{13}$ 是 Pell 方程 $U^2-13V^2=1$ 的基本解. 因此有 $2x-3$ 等于 $\pm x_n$，$\pm \bar{x}_n$，$\pm x_n'$，$\pm \bar{x}_n'$ 之一.

---

① 收稿日期：2007-06-22

基金项目：重庆市教委科研基金资助项目(KJ050807).

作者简介：李双娥(1978-)，女，江西鹰潭人，硕士研究生，主要从事数论研究.

但易验证 $\bar{x}_n = -x_n$，$\bar{x}'_n = -x'_n$，故 $2x-3$ 等于 x_n，$\bar{x}_n$，x'_n，$\bar{x}'_n$ 之一. 由 $x+3=2u^2$ 得

$$4u^2 = x_n + 9 \tag{6}$$

或

$$4u^2 = \bar{x}_n + 9 \tag{7}$$

或

$$4u^2 = x'_n + 9 \tag{8}$$

或

$$4u^2 = \bar{x}'_n + 9 \tag{9}$$

但对于(8) 和(9)，由(4) 和(5) 可得 $3 \mid u$，而 $x+3=2u^2$，从而 $3 \mid x$，与 $3 \nmid x$ 矛盾. 所以只需考虑(6) 和(7). 显然必须 $x_n \geqslant -9$，$\bar{x}_n \geqslant -9$，从而(2),(3) 只需取自

$$x_n + y_n\sqrt{13} = (5+2\sqrt{13})(u_n + v_n\sqrt{13}) = (5+2\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,\ n \geqslant 0 \tag{10}$$

$$\bar{x}_n + \bar{y}_n\sqrt{13} = (-5+2\sqrt{13})(u_n + v_n\sqrt{13}) = (-5+2\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,\ n \geqslant 0 \tag{11}$$

我们先讨论(6). 由(10) 易得递归关系：

$$x_{n+2} = 1298x_{n+1} - x_n \qquad x_0 = 5 \qquad x_1 = 7925 \tag{12}$$

但对递归数列(12) 取模 3，有 $x_n \equiv 2 \pmod 3$，故 $4u^2 \equiv 2 \pmod 3$，这不可能.

下面再来讨论(7). 由(11) 易得递归关系：

$$\bar{x}_{n+2} = 1298\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n \qquad \bar{x}_0 = -5 \qquad \bar{x}_1 = 1435 \tag{13}$$

$$u_{n+2} = 1298u_{n+1} - u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 649 \tag{14}$$

$$v_{n+2} = 1298v_{n+1} - v_n \qquad v_0 = 0 \qquad v_1 = 180 \tag{15}$$

$$\bar{x}_n = -5u_n + 26v_n \qquad \bar{x}_{n+2kt} \equiv (-1)^t\bar{x}_n \pmod{u_k} \tag{16}$$

$$u_{2n} = u_n^2 + 13v_n^2 \qquad v_{2n} = 2u_nv_n \qquad u_n^2 - 13v_n^2 = 1 \tag{17}$$

对递归数列(13) 取模 17，其剩余类周期为 8，当 $n \equiv 2,3,4,7 \pmod 8$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 5,12,14,6 \pmod{17}$，于是由(7) 可得出 $1 = \left(\frac{4u^2}{17}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{17}\right) = -1$，矛盾. 故剩下 $n \equiv 0,1,5,6 \pmod 8$，即 $n \equiv 0,1,5,6,8,9,13,14 \pmod{16}$.

对(13) 取模 47，其剩余类周期为 16，当 $n \equiv 5,6,9,13,14 \pmod{16}$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 19,46,31,46,19 \pmod{47}$，故 $1 = \left(\frac{4u^2}{47}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{47}\right) = -1$，矛盾. 剩下 $n \equiv 0,1,8 \pmod{16}$，即 $n \equiv 0,1,8,16,17,24 \pmod{32}$.

对(13) 取模 31，其剩余类周期为 32，当 $n \equiv 8,24 \pmod{32}$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 23,26 \pmod{31}$，故 $1 = \left(\frac{4u^2}{31}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{31}\right) = -1$，矛盾. 故剩下 $n \equiv 0,1,16,17 \pmod{32}$，即 $n \equiv 0,1 \pmod{16}$.

以下分 4 种情况来讨论 (7)：

ⅰ) 当 $2 \mid n$ 时，有 $n \equiv 0 \pmod{16}$，故可得 $n \equiv 0,4,8 \pmod{12}$. 对(13) 取模 1684801，其剩余类周期为 12，当 $n \equiv 4,8 \pmod{12}$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 177848,1506976 \pmod{1684801}$，于是由(7) 可得出 $1 = \left(\frac{4u^2}{1684801}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{1684801}\right) = -1$，矛盾. 故剩下 $n \equiv 0 \pmod{12}$.

因 $n \equiv 0 \pmod{12}$，故 $3 \mid n$，从而 $n \equiv 0,3,6 \pmod 9$. 对(13) 取模 793207，其剩余类周期为 9，当 $n \equiv 3,6 \pmod 9$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 3868,789362 \pmod{793207}$，于是由(7) 得出 $1 = \left(\frac{4u^2}{793207}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{793207}\right) = -1$，矛盾. 故剩下 $n \equiv 0 \pmod 9$，又 $4 \mid n$，即 $n \equiv 0 \pmod{36}$.

对(13) 取模 53，其剩余类周期为 13，当 $n \equiv 2,3,4,5,6,7,8,12 \pmod{13}$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 12,30,22,8,23,3,51,34 \pmod{53}$，于是由(7) 得出 $1 = \left(\frac{4u^2}{53}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{53}\right) = -1$，矛盾. 故剩下 $n \equiv 0,1,9,10,11 \pmod{13}$.

对(13) 取模 79，其剩余类周期为 13，当 $n \equiv 9,10,11 \pmod{13}$ 时，$\bar{x}_n + 9 \equiv 60,33 \pmod{79}$，于是由(7) 得出 $1 = \left(\frac{4u^2}{79}\right) = \left(\frac{\bar{x}_n+9}{79}\right) = -1$，矛盾. 故剩下 $n \equiv 0,1 \pmod{13}$. 又 $4 \mid n$，故 $n \equiv 0,40 \pmod{52}$.

对(13) 取模 2814901474321，其剩余类周期为 52，当 $n \equiv 40 \pmod{52}$ 时

$$\bar{x}_n+9\equiv 1553099342998\ (\mathrm{mod}\ 2814901474321)$$

于是由(7)得出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{2814901474321}\right)=\left(\dfrac{\bar{x}_n+9}{2814901474321}\right)=-1$，矛盾．故剩下 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 52)$．

综上所述，当 $2\mid n$ 时，若(7)成立，则有 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9\times 13\times 2^4)$．

ⅱ）当 $2\nmid n$ 时，有 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 16)$．对(13)取模 43，其剩余类周期为 7，当 $n\equiv 5,6\ (\mathrm{mod}\ 7)$ 时，$\bar{x}_n+9\equiv 39\ (\mathrm{mod}\ 43)$，于是由(7)得出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{43}\right)=\left(\dfrac{\bar{x}_n+9}{43}\right)=-1$，矛盾．故剩下 $n\equiv 0,1,2,3,4\ (\mathrm{mod}\ 7)$，又 $2\nmid n$，即为 $n\equiv 1,3,7,9,11\ (\mathrm{mod}\ 14)$．

对(13)取模 29，其剩余类周期为 14，当 $n\equiv 3,7,9\ (\mathrm{mod}\ 14)$ 时，$\bar{x}_n+9\equiv 8,14,15\ (\mathrm{mod}\ 29)$，于是由(7)得出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{29}\right)=\left(\dfrac{\bar{x}_n+9}{29}\right)=-1$，矛盾．故剩下 $n\equiv 1,11\ (\mathrm{mod}\ 14)$，又 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$，即为 $n\equiv 1,25\ (\mathrm{mod}\ 28)$．

对(13)取模 400931，其剩余类周期为 28，当 $n\equiv 25\ (\mathrm{mod}\ 28)$ 时，$\bar{x}_n+9\equiv 147817\ (\mathrm{mod}\ 400931)$，于是由(7)得出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{400931}\right)=\left(\dfrac{\bar{x}_n+9}{400931}\right)=-1$，矛盾．故剩下 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 28)$．

因 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 16)$，故 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$，即 $n\equiv 1,9,17\ (\mathrm{mod}\ 24)$．对(13)取模 685511，其剩余类周期为 24，当 $n\equiv 9,17\ (\mathrm{mod}\ 24)$ 时，$\bar{x}_n+9\equiv 359547,324547\ (\mathrm{mod}\ 685511)$，于是由(7)得出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{685511}\right)=\left(\dfrac{\bar{x}_n+9}{685511}\right)=-1$，矛盾．故剩下 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 24)$．

因 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 16)$，故 $n\equiv 1,17,33,49\ (\mathrm{mod}\ 64)$．对递归数列(13)取模 257，其剩余类周期为 64，当 $n\equiv 17,49\ (\mathrm{mod}\ 64)$ 时，$\bar{x}_n+9\equiv 212,63\ (\mathrm{mod}\ 257)$，于是由(7)得出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{257}\right)=\left(\dfrac{\bar{x}_n+9}{257}\right)=-1$，矛盾．故剩下 $n\equiv 1,33\ (\mathrm{mod}\ 64)$，即 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 32)$．

综上，当 $2\nmid n$ 时，若(7)成立，则有 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3\times 7\times 2^5)$．

ⅲ）$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9\times 13\times 2^4)$，且 $n\neq 0$ 时，(7)式不成立．

事实上，若 $n\neq 0$，令 $n=2\times 9\times 13\times 2^t\times k$，$t\geqslant 3$，$2\nmid k$．现对 k 分两种情况讨论：

1）$k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$，当 $t\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=9\times 2^t$；当 $t\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=9\times 13\times 2^t$；当 $t\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，$m=13\times 2^t$．由(16)～(17)式，得

$$\begin{aligned}4u^2=\bar{x}_n+9&\equiv \bar{x}_{2m}+9\equiv -5u_{2m}+26v_{2m}+9\\&\equiv -5(u_m^2+13v_m^2)+52u_mv_m+9(u_m^2-13v_m^2)\\&\equiv 4u_m^2-182v_m^2+52u_m v_m\ (\mathrm{mod}\ u_{2m})\end{aligned}\tag{18}$$

注意到 $u_m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$，$v_m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，${u_m}^2+13{v_m}^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$，故

$$\begin{aligned}\left(\frac{4u_m^2-182v_m^2+52u_mv_m}{u_{2m}}\right)&=\left(\frac{-117v_m^2+26u_mv_m}{u_m^2+13v_m^2}\right)=\left(\frac{13v_m}{u_m^2+13v_m^2}\right)\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_m^2+13v_m^2}\right)\\&=\left(\frac{u_m-9v_m/2}{u_m^2+13v_m^2}\right)=\left(\frac{u_m^2+13v_m^2}{\mid u_m-9v_m/2\mid}\right)=\left(\frac{133}{\mid u_m-9v_m/2\mid}\right)=-\left(\frac{2u_m-9v_m}{133}\right)\end{aligned}$$

利用递归数列(14),(15)，对 $\{2u_m-9v_m\}$ 取模 133，得周期为 40 的剩余类序列．根据 m 的取法，有 $m\equiv 24\ (\mathrm{mod}\ 40)$，此时 $2u_m-9v_m\equiv 58\ (\mathrm{mod}\ 133)$，故(18)给出 $1=\left(\dfrac{4u^2}{u_{2m}}\right)=-\left(\dfrac{58}{133}\right)=-1$，矛盾．

2）$k\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$．当 $t\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=13\times 2^t$；当 $t\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=9\times 2^t$；当 $t\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，令 $m=9\times 13\times 2^t$．由(16)～(17)式，得

$$\begin{aligned}4u^2=\bar{x}_n+9&\equiv -\bar{x}_{2m}+9\equiv 5u_{2m}-26v_{2m}+9\\&\equiv 5(u_m^2+13v_m^2)-52u_mv_m+9(u_m^2-13v_m^2)\\&\equiv 14u_m^2-52v_m^2-52u_m v_m\ (\mathrm{mod}\ u_{2m})\end{aligned}\tag{19}$$

类似可得$\left(\dfrac{14u_m^2-52v_m^2-52u_mv_m}{u_{2m}}\right)=-\left(\dfrac{2u_m+9v_m}{133}\right)$. 利用递归数列(14),(15),对$\{2u_m+9v_m\}$取模133,得周期为40的剩余类序列. 根据$m$的取法,有$m\equiv 16 \pmod{40}$,此时$2u_m+9v_m\equiv 58 \pmod{133}$,故(19)给出$1=\left(\dfrac{4u^2}{u_{2m}}\right)=-\left(\dfrac{58}{133}\right)=-1$,矛盾.

ⅳ)$n\equiv 1 \pmod{3\times 7\times 2^5}$,且$n\neq 1$时,(7)式不成立.

事实上,令$n=2\times 3\times 7\times 2^t\times k$,$t\geqslant 4$,$2\nmid k$. 当$t=4$时,令$m=7\times 2^t$;当$t\geqslant 5$时,令

$$m=\begin{cases}3\times 2^t & t\equiv 1,2,4,6,7,9 \pmod{10}\\ 7\times 2^t & t\equiv 0,3,5,8 \pmod{10}\end{cases}$$

由(16)式,得
$$4u^2=\bar{x}_n+9\equiv -\bar{x}_1+9=-1426 \pmod{u_m} \tag{20}$$
利用递归数列(13),对$\{u_m\}$取模713得周期为352的剩余类序列. 根据m的取法,同时注意到$\{2^t\}$对模352的周期为10,故当$t\geqslant 5$时,有:

$t \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m \pmod{352}$	128	160	320	320	224	224	192	32	32	128
$u_m \pmod{713}$	63	559	373	373	63	63	559	373	373	63

当$t=4$时,$m\equiv 112 \pmod{352}$,$u_m\equiv 371 \pmod{713}$,对此m及表中所有m均有$\left(\dfrac{u_m}{713}\right)=-1$,故(20)给出$1=\left(\dfrac{4u^2}{u_m}\right)=\left(\dfrac{-1426}{u_m}\right)=\left(\dfrac{713}{u_m}\right)=\left(\dfrac{u_m}{713}\right)=-1$,故(7)式不成立.

由情形ⅰ),ⅱ),ⅲ)和ⅳ)知,当$n\neq 0,1$时,(7)式不成立.

当$n=0$时,$4u^2=\bar{x}_0+9=4$,故$u=\pm 1$,代入$x+3=2u^2$得$x=-1$,从而$y=\pm 1$;当$n=1$时,$4u^2=\bar{x}_1+9=1444$,$u=\pm 19$,代入$x+3=2u^2$得$x=719$,从而$y=\pm 3781$.

综上,不定方程(1)仅有整数解$(-3,0)$,$(-1,\pm 1)$,$(719,\pm 3781)$. 证毕.

参考文献:

[1] 曹玉书. 关于丢番图方程$x^3\pm 27=Dy^2$[J]. 黑龙江大学自然科学学报,1988,(2):4-8.

[2] 李双娥. 关于不定方程$x^3-27=7y^2$[J]. 重庆文理学院学报(自然科学版),2007,(2):16-17.

[3] 杨丽芬,赫立柱. 关于丢番图方程$x^3+1=Dy^2$[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报,1995,(4):32-36.

[4] 柯 召,孙 琦. 谈谈不定方程[M]. 上海:上海教育出版社,1980:28-35.

On the Diophantine Equation $x^3+27=26y^2$

LI Shuang-e

College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China

Abstract: In this paper the author has proved that the Diophantine equation $x^3+27=26y^2$ has only integer solutions $(-3, 0)$, $(-1, \pm 1)$, $(719, \pm 3781)$ with the methods of recurrent sequence, congruence and quadratic residue.

Key words: integer solution; diophantine equation; recurrent sequence; quadratic residue

责任编辑 覃吉康