

文章编号: 1000-5471(2007)06-0131-04

# 物理实验不确定度评定中两变量 相关系数的一种近似算法<sup>①</sup>

宋向炯

绍兴文理学院 物理与电子信息系, 浙江 绍兴 312000

**摘要:** 物理实验中两个变量的相关关系可以看成是这两个变量在某种意义上相同、相异、相反关系的总和。据此, 用两个变量的同异反联系数近似地代替这两个变量的相关系数, 从而简化了大学物理实验中作不确定度评定时相关系数的繁琐计算, 为从微观角度分析相关系数的构成提供了新思路, 也是对大学物理实验教学改革的一种有益探索。

**关键词:** 物理实验; 不确定度; 相关系数; 联系数; 同异反

**中图分类号:** G420; O159

**文献标识码:** A

在物理实验结果的不确定度评定中, 经常会遇到输入量之间的相关系数计算问题<sup>[1]</sup>。例如, 用同一支游标卡尺测量和计算一个矩形的面积时, 长和宽的测量数据就是一组有相关关系的量, 需要计算两者的相关系数; 当用两支游标卡尺分别测量矩形的长和宽时, 则长和宽的测量值互相独立, 这时不需要计算两者的相关系数。按数理统计, 对两个变量的多组成对测量数据  $\{x_i = x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $\{y_i = y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , 其相关系数  $r_{xy}$  的计算公式为

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

显然, 当测量次数较多时, 按(1)式计算显得十分繁琐, 因而在实际计量测试工作中采用简化处理, 比如只取  $r = -1$  (负相关),  $r = 0$  (不相关),  $r = 1$  (正相关) 3 个值<sup>[2]</sup>, 但是这样的简化不符合大学物理实验教学的要求; 如何才能做到既避免繁琐的计算, 又能在物理实验教学中培养学生的分析能力和创新能力, 并从本质上加深对两变量相关关系物理意义的认识, 显然是一个有待探索的问题。

本文根据有关文献<sup>[3-6]</sup>, 把由我国学者赵克勤提出的同异反集对分析(简称为同异反分析)用于物理实验结果不确定度评定时两变量相关系数计算和分析的研究, 给出了两变量相关系数的一种近似算法。

## 1 基本原理

从物理学的角度看, (1) 式是在宏观层次上通过统计来刻划  $\{x_i\}$  与  $\{y_i\}$  的相关状况, 而且不论其相关系数  $r_{xy}$  为何值, 总不外乎正相关 ( $r_{xy} > 0$ ), 不相关 ( $r_{xy} = 0$ ), 负相关 ( $r_{xy} < 0$ ), 这 3 种情况; 而事实上, 在

① 收稿日期: 2007-01-23

作者简介: 宋向炯(1974-), 男, 浙江嵊州人, 实验师, 主要从事物理实验教学的研究。

微观层次上,对每一组成对测量数据 $\{x_i, y_i\}$ ,  $x_i$ 与 $y_i$ 的相关关系同样也不外乎是正相关、不相关、负相关 3 种情况;而所谓正相关的物理意义是:当 $X_i$ 增大(或减小)时, $Y_i$ 也增大(或减小);负相关的物理意义是:当 $X_i$ 增大(或减小)时, $Y_i$ 减小(或增大);不相关的物理意义是:当 $X_i$ 增大(或减小)时, $Y_i$ 并不增大或减小,反之亦然.这使得我们能在微观层次上引用同异反集对分析中的联系度来刻划 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 的相关状况.

首先,把 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 看作是一个集对;其次,定义 $X_i$ 与 $Y_i$ 同时增大或同时减小为“同”(相当于正相关), $X_i$ 与 $Y_i$ 中一个增大一个减小为“反”(相当于负相关),当 $X_i$ 与 $Y_i$ 即不是同也不是反时为“异”(相当于不相关);若在 $N$ 组成对数据 $(X_i, Y_i)$ 中,有 $S$ 组是同, $F$ 组是异, $P$ 组是反, $S+F+P=N$ ,则 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 的同异反相关状况用同异反联系数

$$U_{x,y} = S + Fi + Pj \quad (2)$$

表示.

令(2)式中的 $a = S/N$ ,  $b = F/N$ ,  $c = P/N$ ,  $\mu_{x,y} = U_{x,y}/N$ ,则得归一化同异反联系数:

$$\mu_{x,y} = a + bi + cj \quad (3)$$

根据集对分析理论,(3)式中的 $j = -1$ , $i$ 在 $[-1, 1]$ 区间视具体情况取值,这里因“异”代表不相关所以取 $i = 0$ ,这样就把(3)式又进一步简化为

$$\mu_{x,y} = a - c \quad (4)$$

$\mu_{x,y}$ 在集对分析中称为同异反联系数,以上面的推导过程可以看出, $\mu_{x,y}$ 可以作为 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 相关系数的一个近似数.容易看出,在 $\mu_{x,y} > 0$ 时, $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 是正相关;在 $\mu_{x,y} < 0$ 时, $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 是负相关;在 $\mu_{x,y} = 0$ 时, $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 不相关.

如何根据 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 的增大或减小对 $\{x_i, y_i\}$ 作出同异反判别,可以通过对 $\{X_i\}$ 、 $\{Y_i\}$ 从小到大的编秩来实现,详见以下 3 例.

## 2 举 例

**例 1** 在铜丝的电阻温度系数测量实验中,测得温度 $t$ 与电阻 $R$ 的数据如表 1 所示.试计算 $R$ 与 $t$ 的相关系数<sup>[1]</sup>.

表 1 铜丝的电阻温度系数测量数据

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
温度 $t/^\circ\text{C}$	14.3	25.0	33.3	44.9	52.8	64.0	73.8	84.8
秩次	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
电阻 $R/\Omega$	0.143 1	0.148 9	0.153 3	0.158 9	0.163 5	0.169 0	0.173 9	0.179 6
秩次	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
同异反	同	同	同	同	同	同	同	同

解:根据(1)式算得 $R$ 与 $t$ 的相关系数 $r_{R,t}=0.997\approx 1$

根据本文给出的同异反集对分析法,由于每组成对数据 $\{t_i, R_i\}$ 的秩次都相同,所以得 $R_i$ 与 $t_i$ 的联系度为

$$U_{R,t} = 8 + 0i + 0j \quad (5)$$

化为联系度得:

$$\mu_{R,t} = 1 + 0i + 0j \quad (6)$$

因此得 $r_{R,t}=0.997$ 的近似相关系数为 1,两者仅相差 0.3%.

**例 2** 用同一支游标卡尺测量一个矩形的长 $l$ 和 $m$ 宽各 10 次,按 $s=l \cdot m$ 计算出该矩形的面积,得测量数据如表 2 所示,试计算 $\{l_i\}$ 和 $\{m_i\}$ 的相关系数 $r_{l,m}$ .

表2 矩形的长  $l$  和  $m$  宽测量数据

										mm
次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l$	40.1	40.2	40.0	40.1	40.1	40.0	40.1	40.1	40.2	40.1
	中	大	小	中	中	小	中	中	大	中
	②	③	①	②	②	①	②	②	③	②
$m$	20.0	20.2	20.0	20.1	20.1	20.0	20.0	20.1	20.1	20.1
	小	大	小	中	中	小	小	中	中	中
	①	③	①	②	②	①	①	②	②	②
同异反判断	异	同	同	同	同	同	异	同	异	同

解:按(1)式计算,得  $r_{l,m}=0.74$ .

按前述同异反集对分析思路,可以看出  $\{l_i\}$  10次测量数据可分成 40.2(大)、40.1(中)、40.0(小)3档,  $\{m_i\}$  10次测量数据也可分成 20.2(大)、20.1(中)、20.0(小)3档(表1),根据大一大、中一中、小一小配对为同,大一中、中一小配对为异,大一小配对为反的同异反判断准则,得10组成对数据中有7对为同,3对为异,所以得  $l_i$  与  $m_i$  的联系数为

$$u_{l,m} = 7 + 3i + 0j \quad (7)$$

化为联系度得

$$\mu_{l,m} = 0.7 + 0.3i \quad (8)$$

根据(4)式和(6)式得

$$\mu_{l,m} = 0.7 \quad (9)$$

于是得知  $r_{l,m}$  的近似数为 0.7,与按(1)计算结果 0.74 仅相差 5%。本例也可以按秩次配对作出同异反判断,其中秩次号相同时为同,相异时为异,但最小秩次与最大秩次配对时为反,所得结果不变。

**例3** 在单摆测重力加速度测量实验中,单摆型号为J-LD33,取  $m=20.21\text{ g}$ ,  $\theta \approx 2.5^\circ$  用秒表测得30次摆动所用时间  $T$ ,周期时间  $t$  与摆长  $l$  的数据如表3所示.试计算  $t$  与  $l$  的相关系数。

表3 时间  $t$  与  $l$  摆长的实验值

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
时间/ $t \cdot \text{s}^{-1}$	1.42	1.55	1.68	1.79	1.90	2.01	2.12	2.24	2.33
秩次	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
摆长/ $l \cdot \text{cm}^{-1}$	50.00	60.00	70.00	80.00	90.00	100.00	110.00	120.00	130.00
秩次	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

解:按(1)式计算,得  $r_{t,l}=0.968$ .

按前面给出的同异反集对分析法,由于每组成对数据的秩次都相同,所以得时间  $t(\text{s})$  与摆长  $l(\text{cm})$  的联系数为

$$U_{t,l} = 9 + 0i + 0j \quad (10)$$

化为联系度得:

$$\mu_{t,l} = 1 + 0i + 0j \quad (11)$$

因此得  $r_{t,l}=0.968$  的近似相关系数为 1,两者仅相差 3.2%。

### 3 结 语

本文给出物理实验不确定度评定中两个变量相关系数的一种近似算法,其物理意义是深入到两个变量的内部,从微观层次上考察每对数据的同(正相关)、异(不相关)、反(负相关)相关情况,再作同异反程度的总体统计与分析.既是对传统数理统计中两变量相关系数构成的一种微观分析,同时又通过把直接的数值计算转化为先对数据对作同异反定性,再综合同异反程度,得到两变量相关系数的一种较好的近似值.从大学物理实验教学改革的角度看,引进一些当代数学物理前沿研究中的一些新思想、新理论、新算法,是对

大学物理实验教学改革的一种有益探索<sup>[7]</sup>, 有利于学生实验分析能力和创新能力的培养.

#### 参考文献:

- [1] 周 超, 梁 良, 不确定度的相关系数的研究 [J]. 大学物理实验, 2005, 18(2): 71—72.
- [2] 朱 健. 相关输入量合成中的协方差及相关系数的分析 [J]. 计量技术, 2004(2): 53—54.
- [3] 赵克勤. 集对分析及其初步应用 [M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2000: 116.
- [4] 余国祥. 基于 SPA 的学生成绩相关性研究 [J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 1997, 20(3): 37—41.
- [5] 阮玲霞. 12 min 跑与肺活量指数相关关系的同异反分析 [J]. 上海体育学院学报, 2001, 25(5): 747—748.
- [6] 覃 杰. 卫生统计中相关系数不确定性的集对分析 [J]. 右江民族医学院学报, 2003, 25(5): 9—11.
- [7] 郑勇林, 郑瑞伦. 大学物理实验课程的改革和探索 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(2): 369—372.

## An Approximate Calculation Method for Two Variable Correlation Coefficients in Uncertainty Evaluation of Physical Experiments

SHONG Xiang-jiong

*Department of Physics and Electron Information, Shaoxing College of Liberal Arts and Sciences, Shaoxing, Zhejiang 312000*

**Abstract:** The relationship between two variables can be regarded as the addition of identity, discrepancy and contrary between two correlation coefficients in certain degree. Thus, it can be used that the Identity-Discrepancy-Contrary(IDC) connection number of the two variables to replace approximately the correlation coefficients of them. Therefore the complicated calculating of correlation coefficients in uncertainty evaluation of physical experiments is simplified. In the meantime, the calculation provides a new idea of the construction analysis of the correlation coefficients from the micro angle and a useful teaching reform method exploring for university physical experiments.

**Key words:** physical experiment; uncertainty; correlation coefficient; connection number; Identity-Discrepancy-Contrary(IDC)

责任编辑 潘春燕