文章编号：1000-5471(2007)06-0037-06

涉及积和式的切比雪夫型不等式的一个新证明①

谢　巍

四川理工学院 数学系，四川 自贡 643000

摘要：主旨是借助于代数和分析工具给出如下涉及积和式的切比雪夫型不等式

$$\frac{\mathrm{per}A}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}}\leqslant\frac{\mathrm{per}B}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}}$$

的一个新证明，同时也展示了该结果的一个新的应用.

关　键　词：积和式；切比雪夫型不等式；矩阵函数；新证明

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A

1　主要结果

我们采用文献[1-4]之符号：

$$x:=(x_1, x_2, \cdots, x_n);\ \mathbb{R}=(-\infty, +\infty);\ \mathbb{R}^n:=\{x \mid x_i\in\mathbb{R}, i=1, \cdots, n\};$$

两个矩阵 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 与矩阵 $B=(b_{i,j})_{m\times n}$ 的 Hadamard 乘积定义为 $A\odot B:=(a_{i,j}b_{i,j})_{m\times n}$. 全文假定整数 $n\geqslant 2$.

定义 1[1,3,4]　设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$ 是一个可换环上的 $n\times n$ 矩阵，则称矩阵函数

$$\mathrm{per}A:=\sum_{\sigma\in S_n}a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

为矩阵 A 的 n 阶积和式. 这里，S_n 为 n 阶对称群.

著名的切比雪夫不等式可表述为：若 $a, b\in\mathbb{R}^n$，且

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,\ b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$$

则有不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\tag{1}$$

若 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则不等式(1) 反向. 不等式(1) 的等号成立当且仅当

$$a_1=a_2=\cdots=a_n \text{ 或 } b_1=b_2=\cdots=b_n$$

文献[1] 在适当的假设下建立了如下有趣的而有用的切比雪夫型不等式

① 收稿日期：2007-06-29

作者简介：谢　巍(1968-)，男，四川蒲江人，讲师，主要从事不等式研究.

$$\frac{\operatorname{per}(A\odot B)}{n!} \geqslant \frac{\operatorname{per}A}{n!}\cdot\frac{\operatorname{per}B}{n!} \tag{2}$$

$$\frac{\operatorname{per}A}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}} \leqslant \frac{\operatorname{per}B}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}} \tag{3}$$

本文主旨是借助于代数和分析工具给出不等式(3)的一个新证明，这个构造性证明更具有直观性和可读性. 其原定理是(即文献[1]之定理 2)

定理 1 设 n 阶方阵 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$，$B=(b_{i,j})_{n\times n}$ 满足 $a_{i,j}>0$，$b_{i,j}>0$，$i,j=1,2,\cdots n$. 如果

$$b_{i,1}\leqslant b_{i,2}\leqslant\cdots\leqslant b_{i,n},\quad \frac{a_{i,1}}{b_{i,1}}\leqslant\frac{a_{i,2}}{b_{i,2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_{i,n}}{b_{i,n}},\ i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

那么不等式(3)成立. 如果不等式组(4)反向，则不等式(3)依然成立. 不等式(3)取等号当且仅当

$$\frac{a_{i,1}}{b_{i,1}}=\frac{a_{i,2}}{b_{i,2}}=\cdots=\frac{a_{i,n}}{b_{i,n}},\ i=1,2,\cdots,n$$

2 定理 1 的证明

除去矩阵 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 第 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_q$ 列的元素后余下的元素及位置不变所得到的 $(m-p)\times(n-q)$ 矩阵记为 $A(i_1,i_2,\cdots,i_p\mid j_1,j_2,\cdots,j_q)$. 文献[4]之定理 1.1 指出如下

引理 若 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 为一个可换环上的 $n\times n$ 矩阵，则有如下 Laplace 恒等式

$$\operatorname{per}A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\operatorname{per}A(i\mid j),\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\operatorname{per}A=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\operatorname{per}A(i\mid j),\ i=1,2,\cdots,n$$

下面我们来证明定理 1. 只证明当不等式组(4)成立时不等式(3)成立，另一种情形的证明与此类似. 令 $a_{i,j}/b_{i,j}=u_{i,j}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$U=(u_{i,j})_{n\times n}$，则有

$$0<b_{i,1}\leqslant b_{i,2}\leqslant\cdots\leqslant b_{i,n},\ 0<u_{i,1}\leqslant u_{i,2}\leqslant\cdots\leqslant u_{i,n},\ i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

引入辅助矩阵函数：

$$F:\mathbb{R}_{++}^{n\times n}\to]0,\infty[,\ F(X):=\frac{\operatorname{per}X}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}x_{i,j}}$$

其中，$\mathbb{R}_{++}^{n\times n}:=\{X=(x_{i,j})_{n\times n}\mid x_{i,j}>0,\ i,j=1,2,\cdots,n\}$，则有

$$F(A):=\frac{\operatorname{per}A}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}a_{i,j}}=\frac{\operatorname{per}(B\odot U)}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}u_{i,j}} \tag{6}$$

不等式(3)可表示为：

$$F(A)\leqslant F(B) \tag{7}$$

在 $A=B\odot U$ 中，令 B 的元素不变，

$$u_{i,j}=1,\ i=1,2,\cdots,p-1,\ j=1,2,\cdots,n;\ u_{p,j}=u_{p,q},\ j=1,2,\cdots,q$$

$u_{i,j}$ 的其余的元素不变所得到的矩阵记为

$$A_{p,q}:=B\odot U_{p,q}=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,q} & b_{1,q+1} & b_{1,q+2} & \cdots & b_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{p-1,1} & b_{p-1,2} & \cdots & b_{p-1,q} & b_{p-1,q+1} & b_{p-1,q+2} & \cdots & b_{p-1,n}\\ b_{p,1}u_{p,q} & b_{p,2}u_{p,q} & \cdots & b_{p,q}u_{p,q} & b_{p,q+1}u_{p,q+1} & b_{p,q+2}u_{p,q+2} & \cdots & b_{p,n}u_{p,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n,1}u_{n,1} & b_{n,2}u_{n,2} & \cdots & b_{n,q}u_{n,q} & b_{n,q+1}u_{n,q+1} & b_{n,q+2}u_{n,q+2} & \cdots & b_{n,n}u_{n,n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

其中，

$$U_{p,q}:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_{p,q} & u_{p,q} & \cdots & u_{p,q} & u_{p,q+1} & u_{p,q+2} & \cdots & u_{p,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,q} & u_{n,q+1} & u_{n,q+2} & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}_{n\times n},\ 1\leqslant p,\ q\leqslant n.$$

则由分式函数的求导法则得

$$\frac{\partial F(A_{p,q})}{\partial u_{p,q}}=\Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq p}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}u_{i,j}\Big)^{-1}\Big(u_{p,q}\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}+\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}\Big)^{-2}M \tag{8}$$

其中，

$$M=\frac{\partial(\mathrm{per}A_{p,q})}{\partial u_{p,q}}\Big(u_{p,q}\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}+\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}\Big)-(\mathrm{per}A_{p,q})\sum_{j=1}^{q}b_{p,j},$$

$$\frac{\partial(\mathrm{per}A_{p,q})}{\partial u_{p,q}}=\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)$$

注意，将 $\mathrm{per}A_{p,q}$ 的第 p 行使用引理可知，$F(A_{p,q})$ 是关于 $u_{p,q}$ 的线性分式函数，它具有形式：$F(A_{p,q})=(au_{p,q}+b)/(cu_{p,q}+d)$，这里，

$$a=\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j),\ b=\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j),$$

$$c=\Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq p}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}u_{i,j}\Big)\sum_{j=1}^{q}b_{p,j},\ d=\Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq p}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}u_{i,j}\Big)\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}$$

所以 $\partial F(A_{p,q})/\partial u_{p,q}=(ad-bc)/(cu_{p,q}+d)^2$ 的分子与 $u_{p,q}$ 无关，即 M 的表达式中与 $u_{p,q}$ 无关，故可在 M 中置 $u_{p,q}=0$. 由引理得

$$\mathrm{per}A_{p,q}=\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j),$$

$$\begin{aligned} M&=\Big(\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)\Big)\Big(\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}\Big)-\Big(\sum_{j=q+1}^{n}b_{p,j}u_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\Big)\\ &=\Big(\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)\Big)\Big(\sum_{t=q+1}^{n}b_{p,t}u_{p,t}\Big)-\Big(\sum_{t=q+1}^{n}b_{p,t}u_{p,t}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid t)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\Big)\\ &=\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\Big[\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)\sum_{t=q+1}^{n}b_{p,t}u_{p,t}-\sum_{t=q+1}^{n}b_{p,t}u_{p,t}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid t)\Big]\\ &=\sum_{j=1}^{q}b_{p,j}\sum_{t=q+1}^{n}b_{p,t}u_{p,t}(\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)-\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid t)) \end{aligned} \tag{9}$$

往证 $\forall j,t:1\leqslant j\leqslant q<t\leqslant n$ 有

$$\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid j)-\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid t)\geqslant 0 \tag{10}$$

只需证明

$$\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid 1)\geqslant \mathrm{per}A_{p,q}(p\mid 2)\geqslant\cdots\geqslant \mathrm{per}A_{p,q}(p\mid n) \tag{11}$$

仿照前面的做法我们有：

$$\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid 1)=\sum_{i=1}^{p-1}b_{i,2}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p,i\mid 1,2)+\sum_{i=p+1}^{n}b_{i,2}u_{i,2}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p,i\mid 1,2),$$

$$\mathrm{per}A_{p,q}(p\mid 2)=\sum_{i=1}^{p-1}b_{i,1}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p,i\mid 2,1)+\sum_{i=p+1}^{n}b_{i,1}u_{i,1}\,\mathrm{per}A_{p,q}(p,i\mid 2,1),$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} b_{i,1}\mathrm{per}A_{p,q}(p,i \mid 1,2) + \sum_{i=p+1}^{n} b_{i,1}u_{i,1}\mathrm{per}A_{p,q}(p,i \mid 1,2)$$

于是有

$$\mathrm{per}A_{p,q}(p \mid 1) - \mathrm{per}A_{p,q}(p \mid 2)$$
$$= \sum_{i=1}^{p-1}(b_{i,2} - b_{i,1})\mathrm{per}A_{p,q}(p,i \mid 1,2) + \sum_{i=p+1}^{n}(b_{i,2}u_{i,2} - b_{i,1}u_{i,1})\mathrm{per}A_{p,q}(p,i \mid 1,2);$$
$$b_{i,2} \geqslant b_{i,1},\ u_{i,2} \geqslant u_{i,1} \Rightarrow \mathrm{per}A_{p,q}(p \mid 1) - \mathrm{per}A_{p,q}(p \mid 2) \geqslant 0$$

这就证明了 $\mathrm{per}A_{p,q}(p \mid 1) \geqslant \mathrm{per}A_{p,q}(p \mid 2)$. 同理可证明不等式组(11) 的其它不等式. 因此不等式组(11) 获得证明，从而不等式(10) 获得证明.

注意，$A_{p,q}$ 是 $u_{p,q}$ 的矩阵函数，故可引入记号 $A_{p,q} = A_{p,q}(u_{p,q})$. 由(8－10) 得

$$\partial F(A_{p,q})/\partial u_{p,q} \geqslant 0,\ \forall\, p,q: 1 \leqslant p,q \leqslant n$$

因此，$F(A_{p,q}u(p,q))$ 关于 $u_{p,q}$ 递增. 注意到：

$$F(A_{p,q}(u_{p,q})) \leqslant F(A_{p,q}(u_{p,q+1})) \equiv F(A_{p,q+1}(u_{p,q+1})),$$
$$F(A_{p,n}(u_{p,n})) \equiv F(A_{p+1},1(u_{p+1},1))$$

于是，

$$F(A) = F(A_{1,1}(u_{1,1})) \leqslant F(A_{1,1}(u_{1,2})) = F(A_{1,2}(u_{1,2})) \leqslant \cdots \leqslant F(A_{1,k}(u_{1,k})) \leqslant \cdots$$
$$\leqslant F(A_{1,n-1}(u_{1,n-1})) \leqslant F(A_{1,n-1}(u_{1,n})) = F(A_{1,n}(u_{1,n}))$$
$$= F(A_{2,1}(u_{2,1})) \leqslant F(A_{2,1}(u_{2,2})) = F(A_{2,2}(u_{2,2})) \leqslant \cdots \leqslant F(A_{2,n}(u_{2,n}))$$
$$= F(A_{3,1}(u_{3,1})) \leqslant \cdots \leqslant F(A_{n-1,n}(u_{n-1,n})) = F(A_{n,1}(u_{n,1})) \leqslant F(A_{n,1}(u_{n,2}))$$
$$= F(A_{n,2}(u_{n,2})) \leqslant \cdots \leqslant F(A_{n,n-1}(u_{n,n})) = F(A_{n,n}(u_{n,n})) = F(B)$$

因此，不等式(7) 和(3) 获证. 由以上证明可知，不等式(3) 取等号的条件正如定理 1 所云. 证毕.

3 应　　用

本节我们将给出定理 1 的一个有别于文献[1] 的应用.

定理 2　设 B_m^+ 是$\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m > 0\}$ 的非空的且有限的子集，$p: = \max\limits_{\alpha \in B_m^+}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \leqslant 1$. 那么对于函数 $\lambda: B_m^+ \to (0, +\infty)$ 及函数

$$f: \mathbb{R}_{++}^n \to (0, +\infty),\ f(x) = \sum_{\alpha \in B_m^+} \frac{\lambda(\alpha)}{n!}\mathrm{per}(x_j^{\alpha_i})_{n\times n}$$

有不等式

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \leqslant \frac{\int_{[a,b]^n}\left[\frac{f(x)}{f(1,1,\cdots,1)}\right]^{1/m} dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{(b-a)^n} \leqslant \frac{a+b}{2} \tag{12}$$

其中，$0 < a < b$，$[a, b]^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leqslant x_i \leqslant b,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为 n 维正方体.

证明　令 $a = x$，$b = (1, 1, \cdots, 1)$，不妨设 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，则有

$$0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n,\ 0 < x_1/b_1 \leqslant x_2/b_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n/b_n$$

文献[1] 利用定理 1 获得了如下不等式(即[1] 的定理 3)：

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i}\right)^{m/n} \leqslant \frac{f(a)}{f(b)} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^p}\right)^{m/p}$$

故有

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \left[\frac{f(x)}{f(1,1,\cdots,1)}\right]^{1/m} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} (\forall x \in \mathbb{R}_{++}^n) \tag{13}$$

所以由(13)的第一个不等式得

$$\int_{[a,b]^n}\left[\frac{f(x)}{f(1,1,\cdots,1)}\right]^{1/m} dx_1 dx_2\cdots dx_n \geqslant \int_{[a,b]^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int_a^b x_i^{1/n} dx_i = \left[\frac{n}{n+1}(b^{(n+1)}/n - a^{(n+1)}/n)\right]^n$$

因为$(n+1)+n \geqslant 2+1$，$\dfrac{(n+1)-n}{\ln(n+1)-\ln n} \geqslant \dfrac{2-1}{\ln 2-\ln 1}$，所以由[12]的引理有

$$\frac{\int_{[a,b]^n}\left[\frac{f(x)}{f(1,1,\cdots,1)}\right]^{1/m} dx_1 dx_2\cdots dx_n}{(b-a)^n}$$

$$\geqslant\left(\frac{n}{n+1}\,\frac{b^{\frac{n+1}{n}}-a^{\frac{n+1}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}-a^{\frac{n}{n}}}\right)^n \geqslant \left(\frac{1}{2}\,\frac{b^{\frac{2}{n}}-a^{\frac{2}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

由(13)的第二个不等式及 $p \leqslant 1$ 得

$$\frac{\int_{[a,b]^n}\left[\frac{f(x)}{f(1,1,\cdots,1)}\right]^{1/m} dx_1 dx_2\cdots dx_n}{(b-a)^n} \leqslant \frac{\int_{[a,b]^n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} dx_1 dx_2\cdots dx_n}{(b-a)^n}$$

$$\leqslant\frac{\int_{[a,b]^n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) dx_1 dx_2\cdots dx_n}{(b-a)^n} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b-a)^{n-1}\int_a^b x_i dx_i}{(b-a)^n} = \frac{a+b}{2}$$

证毕.

注　$[f(x)/f(1,1,\cdots,1)]^{1/m}$ 是正实数组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一种极为广泛的平均，即多项式平均(参考[5])，而

$$\frac{\int_{[a,b]^n}\left[\frac{f(x)}{f(1,1,\cdots,1)}\right]^{1/m} dx_1 dx_2\cdots dx_n}{(b-a)^n}$$

则为这个平均在 n 维正方体 $[a,b]^n$ 上的函数平均. 由于这个平均一般没有初等表达式，所以定理 2 是有用的.

致谢:作者衷心感谢文家金和王挽澜两位教授对本文提出的一些宝贵意见!

参考文献:

[1] Jiajin Wen and Wan-lan Wang. Chebyshev type inequalities involving permanents and their application [J]. Linear Algebra and its Applications. 2007,422(1)295－303.

[2] Bullen P S, Mitrinnovic D S, Vasic P M. Means and their inequalities [M]. Reidel, Dordrecht/ Boston/Lanca-ster/Tokyo,1988.

[3] Hevers K J. Characterization of the Permanent [J]. Linear Alcebra and its Application. 1988, 101:49－72.

[4] Minc H. Permanents [M]. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1978.

[5] 文家金，萧昌建，张日新. 一类齐次对称多项式上的切比雪夫不等式 [J]. 数学杂志，2003，23(4)：431－436.

[6] Shmuel Friedland. A lower for the permanent of a doubly stochastic matrix [J]. The Annalas of Mathematics, 2nd Ser, 1979, 110(1): 167－176.

[7] Wen J J, Wang W L, Lu Y J, et al. The Method of Descending Dimension for Establishing Inequalities (I) [J]. J. Southwest Univ. Nationalities Natur. Sci, 2003, 29(3): 527－532.

[8] J. E. Pecaric ,Wen Jia-jin ,Wan-lan Wang and Lu Tao. A Generalization of Maclaurin′s Inequalities and its Appli-cations [J]. Mathematical Inequalities and Applications, 2005, 8(4): 583－598.

[9] Vlad Timofte. On the positivity of symmetric polynomial functions [J]. J. Math. Anal. Appl，2003，28(4)：174－190.

[10] Bullen P S，Mitrinovic D S，Vasic P M. Means and their inequalities [M]. D. Reidel Publishing Company，1988.

[11] Mitrinovic D S，Pecaric J E，Fink A M. Classical and new inequalities in analysis [M]. Kluwer Academic Publishers，Dordrecht / Boston / London，1993.

[12] 王挽澜，文家金，石焕南. 幂平均的最优值 [J]. 数学学报，2004，47(6)：1053－1062.

A New Proof of a Chebyshev Type Inequality Involving Permanents

XIE Wei

Department of Mathematics，Sichuan University of Science and Engineering，Zigong 643000，Sichuan Province

Abstract：In this paper，by means of some algebraic and analytical skills，the author gives a new proof for Chebyshev type inequality involving permanents

$$\frac{\mathrm{per}A}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}} \leqslant \frac{\mathrm{per}B}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}}$$

Moreover，the author also gives an application of this result.

Key words：permanent；Chebyshev type inequality；matrix function；new proof

责任编辑 汤振金