

文章编号: 1000 - 5471(2007)06 - 0019 - 05

非均匀半导体电导率和霍尔系数测量方法研究^①

张 浩 波

重庆广播电视大学, 重庆 400052

摘要: 应用电动力学理论, 提出了一种测量非均匀半导体电导率和霍尔系数的方法, 论述了这种方法依据的原理和计算公式, 以及用此方法测量的步骤, 并举例说明. 结果表明: 该方法所得结果与文献给出的实验结果相符, 也与用其它方法测量结果一致.

关键词: 电导率; 霍尔系数; 非均匀半导体; 测量

中图分类号: O472

文献标识码: A

目前对于块状导体或均匀半导体的电导率和霍尔系数的测量原理, 许多文献^[1-8]都作了论述, 文献[9]对薄层半导体的电导率和霍尔系数的测量提出了一个经验公式, 但对非均匀半导体以及多层薄的电导率和霍尔系数的测量原理和方法, 则未论述. 在实际生产、科学研究, 特别是在用离子束注入掺杂获取优质半导体器件以及用各种物理、化学方法制备的多层膜的电学、热学等性质研究时, 它的电导率和霍尔系数的测量问题, 就是一个重要的问题, 而目前对其测量的原理和方法未见报导. 为此, 本文将依据电动力学理论, 建立电势满足的方程, 求出电势分布, 进而求出电导率和霍尔系数, 最后与文献给出的实测结果相比较.

1 均匀材料的电导率和霍尔系数

图 1 是用四探针法测量均匀材料电导率 σ 和霍尔系数的装置. 设稳恒电流由探针 1 进入导体, 从探针 3 流出, 在导体内产生电势分布, 在极 2 和 4 间测出电势差 $U_{2,4}$. 显然, 稳定的 $U_{2,4}$ 与探针 1 与 3 的距离 $2l_1$ 和探针 2 与 4 的距离 $2l_2$ 以及样品长 $2a$, 宽 $2b$ 和厚 d 有关. 选取如图 1 所示的坐标系 $oxyz$, 样品厚度 d 很小, 材料中的电势分布将只与 x, y 有关而与 z 无关, 电势满足的方程和边值关系为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} &= 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{I_{1,3}}{\sigma} [\delta(x - l_1) - \delta(x + l_1)] \delta(y) \end{aligned} \quad (1)$$

应用分离变量法很容易求得探针 2, 4 间的电势差 $U_{2,4}$ 为

$$U_{2,4} = \frac{I_{1,3}}{d\sigma} L(a, b, l_1, l_2) \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{ab} \left\{ \sum_{\substack{n=2,4,\dots \\ k=1,3,5}} \frac{\sin^2(\alpha_k l_1)}{\alpha_k^2 + \alpha_n^2} + \sum_{\substack{n=1,3,\dots \\ k=2,4,\dots}} \frac{\sin^2(\alpha_n l_2)}{\alpha_k^2 + \alpha_n^2} - \sum_{k,n=2,4,6,\dots} \frac{[\cos(\alpha_k l_1) - \cos(\alpha_n l_2)]^2}{\alpha_k^2 + \alpha_n^2} \right\} \alpha_n = n\pi/2b, \alpha_k = k\pi/2a \quad (3)$$

霍尔系数的测量是将样品放在横向磁场中(图 1), 稳恒电流 $I_{1,3}$ 通过探针 1 和 3, 测量探针 2 和 4 之间的霍尔电动势 $E_{2,4}$. 当样品较薄且探针间距离远大于样品的厚度时, 霍尔系数与电动势的关系为

$$E_{2,4} = \frac{I_{1,3} R_H B}{d} Q(a, b, l_1, l_2) \quad (4)$$

① 收稿日期: 2007 - 03 - 05

作者简介: 张浩波(1965 -), 男, 四川南部人, 副教授, 主要从事无线电物理学研究.

$$Q = \frac{l_1 l_2}{ab} + \frac{2l_2}{ab} \sum_{n=2,4,6,\dots} (-1)^{n/2} B_n + \frac{8}{a^2} \sum_{\substack{k=1,3,\dots \\ p=2,4,\dots}} (-1)^{\frac{p+k-1}{2}} B_{kp} \sin(\alpha_k l_1) - \frac{8}{b^2} \sum_{\substack{r=1,3,\dots \\ n=2,4,\dots}} (-1)^{\frac{n+r-1}{2}} B_m \sin(\alpha_r l_2) \quad (5)$$

这里

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{2a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{2b}, \quad \alpha_p = \frac{p\pi}{2a}, \quad \alpha_r = \frac{r\pi}{2b}$$

$$B_n = \frac{1}{\alpha_n} \frac{e^{-\alpha_n(a-l_1)} - e^{-\alpha_n(a+l_1)}}{1 + e^{-2\alpha_n a}}$$

$$B_{kp} = \frac{\alpha_k}{\alpha_p(\alpha_k^2 - \alpha_p^2)} \frac{[e^{\alpha_p(b-l_2)} - e^{\alpha_p(b+l_2)}] e^{-\alpha_k b}}{1 + e^{-2\alpha_p b} - e^{-2\alpha_k b} - e^{-2(\alpha_k + \alpha_p)b}}$$

$$B_m = \frac{\alpha_n}{\alpha_r(\alpha_n^2 - \alpha_r^2)} \frac{[e^{\alpha_n(a-l_1)} - e^{\alpha_n(a+l_1)}] e^{-\alpha_r a}}{1 + e^{-2\alpha_n a} - e^{-2\alpha_r a} - e^{-2(\alpha_n + \alpha_r)a}}$$

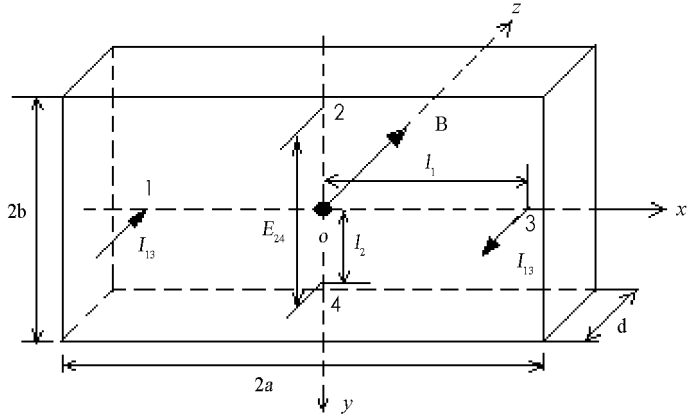


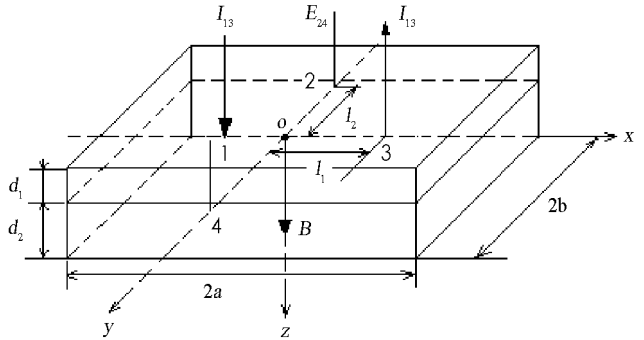
图 1 用四探针法测量均匀晶体的电导率 σ 和霍尔系数 R_H 的装置示意

2 两层结构半导体的电导率和霍尔系数

设有两层结构 1 和 2, 电势为 φ_1 和 φ_2 , 厚度为 d_1, d_2 , 它们具有相同的长 $2a$ 和宽 $2b$, 彼此紧靠. 探针正方排列, 建立坐标系 $oxyz$ (图 2). 让稳恒电流 $I_{1,3}$ 通过探针 1 和 3, 测量探针 2 和 4 间的电势差 $U_{2,4}$. 这种线路图对应的电势分布满足如下的拉普拉斯方程.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1(x, y, z) &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

图 2 用四探针法测量两层结构的电导率和霍尔系数



其边界条件为: 在样品的 $x = \pm a, y = \pm b$ 和 $z = d_1 + d_2$ 处, 表面的电流的垂直分量为零; 在电流的电极点 $\delta(x - l_1)\delta(y), \delta(y - l_2)\delta(x)$ 之外的电流也为零. 在分界面 $z = d_1$ 处电势和电流密度连续, 于是边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} &= 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} &= 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} &= 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=d_1+d_2} &= 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{I_{1,3}}{\sigma_1} [\delta(x - l_1)\delta(y) - \delta(y - l_2)\delta(x)] & & & & (7) \\ \varphi_1 \Big|_{z=d_1} &= \varphi_2 \Big|_{z=d_1} & (\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}) \Big|_{z=d_1} &= 0 & & & & \end{aligned}$$

采用分离变量法, 求得电势 φ_1 和 φ_2 , 进而求得电势差 $U_{2,4}$. 样品厚度较小时有

$$U_{2,4} = \frac{I_{1,3}}{\sigma_0(d_1 + d_2)} L(a, b, l_1, l_2) \quad (8)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2}{d_1 + d_2} \quad (9)$$

而 $L(a, b, l_1, l_2)$ 仍由(3)式决定.

为了测量放于横向磁场中样品的霍尔系数, 可采用如图 2 的装置. 其中, 探针 1,3 是电极, 在电极 2,4 之间测霍尔电动势 $E_{2,4}$.

在这种情况下各层中的电动势 $\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)$ 将满足

$$\nabla^2 \varphi_1(x, y, z) = 0 \quad \nabla^2 \varphi_2(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \sigma_i R_i B \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \sigma_i R_i B \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm b} = 0 \quad (12)$$

$$\varphi_i \Big|_{z=a_1} = \varphi_2 \Big|_{z=a_1} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=d_1+d_2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{I_{1,3}}{\sigma_1} [\delta(x-l_1) - \delta(x+l_1)\delta(y)] \quad (14)$$

$$(\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}) \Big|_{z=d_1} = 0 \quad (15)$$

(11), (12)式分别代表边界 $x = \pm a$, $y = \pm b$ 处电场为零; (13)式代表 $Z = d_1$ 处的电势连续和电场为零; (14)式表示在 $x = \pm l_1, y = 0$ 处有点电荷 $I_{1,3}/\sigma_1$, (15)式代表 $Z = d_1$ 处电流连续.

霍尔系数的测量通常是在弱磁场 $B \leq 0.5 \text{ T}$ 的条件下进行, 荷电粒子在半导体中迁移率不大(约为 $0.1 \text{ m} \cdot \text{V} \cdot \text{s}$)^[9], 因而满足 $\mu B \ll 1$. 此时, 可将该边界问题的解 $\varphi_i (i = 1, 2)$, 设想为无外磁场时的解 φ_{i0} 与计入外磁场后在样品中产生的霍尔场的势 φ_{iH} 之和, 即

$$\varphi_i = \varphi_{i0} + \varphi_{iH} \quad (16)$$

将(16)代入(10)–(15), 将得到 φ_{i0} 和 φ_{iH} 满足的方程和相应的边界条件.

采用傅里叶方法解 φ_{iH} 的边值问题, 得到在各层中的级数形式的电势分布 φ_{iH} . 一般测量中样品厚度 d_i 比探针间距离 l_1, l_2 小得多, 即 $d_i \ll l_1, l_2$. 此时, 将得到探针 2, 4 之间的霍尔电动势

$$E_{2,4} = \frac{IB(\sigma_1^2 R_1 d_1 + \sigma_2^2 R_2 d_2)}{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)} Q \quad (17)$$

将(17)与均匀介质情况的霍尔电势差公式

$$E_{2,4} = IB R_0 Q / d \quad (18)$$

相比较得到两层结构的平均霍尔系数

$$R_0 = \frac{\sigma_1^2 R_1 d_1 + \sigma_2^2 R_2 d_2}{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)^2} \quad (19)$$

3 连续变化的非均匀材料的电导率和霍尔系数

如果材料是非均匀连续变化, 则电导率 σ 和霍尔系数 R 均随深度 z 连续变化, 即 $\sigma = \sigma(z), R = R(z)$, 这时, 可将非均匀介质视为彼此靠近厚度无限小、数目无限多的薄片之叠加, 这时, (9)式和(19)式就过渡到积分, 计算公式为

$$\sigma_0 = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma(z) dz \quad R_0 = \int_0^d \sigma^2(z) R(z) dz / \left[\int_0^d \sigma(z) dz \right]^2 \quad (20)$$

4 因子 L 和 Q 随样品尺寸的变化

要通过测量电势差 $U_{2,4}$ 或霍尔电势 $E_{2,4}$ 及电流 $I_{1,3}$ 、磁场 B , 应用(2)、(3)、(7)、(9)等式来测量样品的电导率和霍尔系数, 首先应计算样品取不同尺寸时的因子 L 和 Q . 显然, 它是一个无穷级数. 由于随着级数 k, n 的增大而各项依次减小. 因为在 L 和 Q 表示式中, 分母中的 α_n^2 和 α_k^2 等均随 n, k 增大而按平方规律增大, 而分子均为有限数, 所以 L 和 Q 收敛较快. 采用计算机计算在探针距离为 $2l_1 = 2l_2 = 1 \text{ mm}$ 情况下, L 和 Q 的值. 在计算 L 值时, (3)式中的 k 和 n 均为 $1, 2, \dots$, 取致 638; 而用(5)式计算 Q 值时, 取 $k = 1, 3, \dots, 53; n = 2, 4, 6, \dots, 302$; . 计算出的不同尺寸下的 L 和 Q 值分别见表 1、表 2.

表 1 不同尺寸下的 Q 值

$\times 10^4$

| $2a/\text{mm}$ | $2b/\text{mm}$ | | | | | | |
|----------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 |
| 1.0 | 9 999 | 8 767 | 8 117 | 7 777 | 7 596 | 7 498 | 7 448 |
| 1.2 | 8 767 | 7 262 | 6 423 | 5 947 | 5 674 | 5 515 | 5 422 |
| 1.4 | 8 120 | 6 423 | 5 445 | 4 867 | 4 518 | 4 303 | 4 169 |
| 1.6 | 7 778 | 5 947 | 4 867 | 4 211 | 3 802 | 3 541 | 3 372 |
| 1.8 | 7 596 | 5 674 | 4 518 | 3 802 | 3 345 | 3 047 | 2848 |
| 2.0 | 7 501 | 5 515 | 4 303 | 3 541 | 3 048 | 2 719 | 2 495 |
| 2.2 | 7 449 | 5 421 | 4 169 | 3 372 | 2 848 | 2 495 | 2 251 |
| 2.4 | 7 421 | 5 367 | 4 085 | 3 261 | 2 713 | 2 340 | 2 080 |

表 2 不同尺寸下的 L 值 $\times 10^4$

| $2a/\text{mm}$ | $2b/\text{mm}$ | | | | | | |
|----------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 |
| 1.0 | 2 203 | 2 175 | 2 135 | 2 105 | 2 086 | 2 077 | 2 073 |
| 1.2 | 2 175 | 2 129 | 2 071 | 2 024 | 1 993 | 1 973 | 1 962 |
| 1.4 | 2 135 | 2 071 | 1 995 | 1 935 | 1 891 | 1 862 | 1 843 |
| 1.6 | 2 105 | 2 024 | 1 935 | 1 862 | 1 809 | 1 771 | 1 745 |
| 1.8 | 2 086 | 1 993 | 1 891 | 1 809 | 1 747 | 1 702 | 1 671 |
| 2.0 | 2 077 | 1 973 | 1 862 | 1 771 | 1 701 | 1 651 | 1 615 |
| 2.2 | 2 073 | 1 961 | 1 843 | 1 745 | 1 671 | 1 615 | 1 574 |
| 2.4 | 1 070 | 1 954 | 1 830 | 1 726 | 1 647 | 1 588 | 1 543 |

由表 1、表 2 均可以看出： L 和 Q 的值均随样品尺寸 $2a, 2b$ 的增大而减小。

5 半导体结构电导率和霍耳系数的测量

5.1 两层半导体结构电导率和霍耳系数的测量

由(2)和(4)式得到单层半导体的电导率和霍耳系数分别为

$$\sigma = \frac{I_{1,3}}{U_{2,4}d}L(a, b, l_1, l_2) \quad R_H = \frac{E_{2,4}d}{I_{1,3}BQ(a, b, l_1, l_2)} \quad (21)$$

两层结构测量中，两层的长宽以及探针间的距离相同，因而其 L 和 Q 相同。此外，通电时两层中的 $I_{1,2}$ 、 $U_{1,3}$ 或 $U_{2,4}$ 均相同，因而有

$$\sigma_i = \frac{I_{1,3}}{U_{2,4}d_i}L(a, b, l_1, l_2) \quad R_{Hi} = \frac{E_{2,4}d_i}{I_{1,3}BQ(a, b, l_1, l_2)} \quad (22)$$

由(22)式看出：只要测量各层的 $U_{2,4}$ 、 $E_{2,4}$ 和 a, b, d 以及 l_1, l_2 ，由表 1、表 2 查出相应的 L 和 Q 的值，由(22)就可求出各层的 σ_i, R_{Hi} ，代入(9)和(19)式，就可得到两层结构的电导率 σ_0 和霍耳系数 R_{H0} 。

5.2 连续变化的非均匀半导体电导率和霍耳系数的测量

通常有两种情况：第一种是不知道材料的信息，只知道它是非均匀连续变化。第二种是知道材料非均匀连续变化及两端的情况。

对第一种情况宜采用多次测量，即：将他们切割成许多长、宽相同而厚度可以不同的许多薄片并按次序编号：1, 2, 3, ..., $i, i+1, \dots$ ，按单层结构方法测量每层的值，沿 Z 方向作出各层电导率 σ_i 和霍耳系数 R_{Hi} 随 Z 的变化情况。用曲线拟合方法，找出电导率 σ 和霍耳系数 R_H 与 Z 的近似表达式 $\sigma(z)$ 、 $R_H(z)$ ，再由(20)求出该非均匀介质的电导率 σ_0 和霍耳系数 R_0 。显然，此种方法较麻烦。

对第二种情况，可根据介质连续分布情况和两端的信息，依据物理知识确定出 $\sigma(z)$ 、 $R_H(z)$ 的具体函数关系，再代入(21)，求出 σ_0, R_0 。

5.3 用第二种方法测量掺杂 Si 块体电导率和霍耳系数

重庆仪表 6 厂提供一块用离子注入法掺 P 的 Si 块体材料(形状如图 3)，已知它沿轴方向按正比关系掺杂到浓度为 $10^{16}/\text{cm}^3$ ，样品长 10 cm，左端电导率和霍耳系数为 117.65 西门子/米和 $0.40 \text{ cm}^3/\text{C}$ ，右端电导率和霍耳系数分别为 210.6 S/m 和 $0.28 \text{ cm}^3/\text{C}$ 。为了求整块材料的电导率和霍耳系数，取端点为坐标原点，则 $d=10 \text{ cm}$ ： $\sigma(d_0)=117.65 \text{ S/m}$ ， $\sigma(d)=210.6 \text{ S/m}$ ， $R_H(d_0)=0.43 \text{ cm}^3/\text{C}$ ， $R_H(d)=0.28 \text{ cm}^3/\text{C}$ 由文献[7,9]知： σ 和 R_H 与离子浓度关系为： $\sigma \sim n, R_H \sim 1/n$ 。可设

$$\sigma(z) = \sigma(d_0) + AZ \quad R_H(z) = R_H(d_0) + B/z \quad (23)$$

其中的系数 A, B 由已知求得： $A = [\sigma(d) - \sigma(d_0)]/d$ ， $B = [R_H(d) - R_H(d_0)]/d$ 。

将(23)代入(20)式，求得

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}[\sigma(d_0) + \sigma(d)] \quad R_{H0} = M/N$$

$$M = \left\{ \frac{1}{3A}R_H(d_0)[3\sigma^2(d_0)Ad + 3\sigma(d_0)A^2d^2 + A^3d^3] + B\left[\sigma^2(d_0)\ln\frac{d}{d_0} + 2A\sigma(d_0)d + \frac{1}{2}A^2d^2\right] \right\}$$

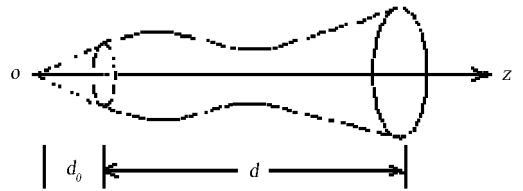


图 3 样品示意和坐标系选取

$$N = \frac{1}{4}d^2[\sigma(d_0) + \sigma(d)]^2$$

将上述数据代入得： $\sigma_0 = 164.1 \text{ S/m}$, $R_{H0} = 0.24 \text{ cm}^3/\text{C}$.

该厂用切片方法，测出每块的电导率和霍尔系数，再求算术平均得到： $\sigma_0 = 164.1 \text{ S/m}$, $R_{H0} = 0.35 \text{ cm}^3/\text{C}$. 文献[6]给出： $\sigma_0 = 165.1 \text{ S/m}$, $R_{H0} = 0.29 \text{ cm}^3/\text{C}$. 显然，用本文提出的第二种方法比该厂用多次切片测量求算术平均更简便、费时少，且不会损害样品和切片时引起的其他附加值。且与文献的结果更接近。

6 结 论

对非均匀介质材料或多层模的电导率和霍尔系数，可利用四探针法采用本文导出的计算公式进行测量。对两层不同介质，则由(9)和(19)式确定。对非均匀介质，如不知材料的有关信息时，则采取切片，依次测量各层的电导率 σ_i 和霍尔系数 R_{Hi} ，作图并用函数拟合确定 $\sigma(z)$ 和 $R_H(z)$ ，由(20)式确定(方法一)；当知道材料的信息时，可用物理知识确定出 $\sigma(z)$ 和 $R_H(z)$ ，由(20)式确定(方法二)。本文提出的方法应用于掺杂P的非均匀Si材料，由方法(二)得出的结果与重庆仪表六厂用切片、多次测量、算术平均所得结果基本一致，但耗时少，不会出现因切片引起的附加误差，且更与文献的结果接近。

参考文献：

- [1] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 419.
- [2] 万 雄. 用BSO晶体传感器测量材料霍尔系数的研究 [J]. 应用激光, 2000, 5: 223 - 225.
- [3] 姜 伟, 张敏芝, 姜 坤. 非均匀材料样品的霍尔系数的计算 [J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2000, 17(1): 52 - 56.
- [4] 周日贵, 聂爱球. 霍尔效应实验误差分析 [J]. 物理实验, 2002, 22(6): 41 - 42.
- [5] 郑瑞伦, 任洪湘. 柑桔果汁电学性质变化规律的研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1990, 15(3): 320 - 326.
- [6] Батавич В В, Концевой Ю А. Измерение параметров полупроводниковых материалов и структур [M]. Москва: Радио и связь, 1985: 264.
- [7] 郭硕鸿. 电动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1984: 65 - 66.
- [8] 文字庄. 电导线性化标定的传感器信号的采集 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2002, 25(2): 195 - 197.
- [9] 迈耶 J W, 艾利克逊 L, 戴维斯 J A. 半导体硅锗中的离子注入 [M]. 余怀之, 朱祖芳, 译. 北京: 科学出版社, 1979: 120.

A Study of the Method to Measure Conductivity and Hall Coefficient of Non-uniform Semiconductor

ZHANG Hao-bo

Chongqing TV university, Chongqing 400039, China

Abstract: Based on the electrodynamics, a new method for measurement of conductivity and hall coefficient of non-uniform semiconductor is presented. This article describes the principle, computation formula, and the measuring process of this method. A testing example is presented. The experiment result shows that the values obtained by this method are consistent with the experiment data from other literatures and other measure methods.

Key words: conductivity; Hall coefficient; non-uniform semiconductor; measurement