文章编号：1000-5471(2007)05-0033-06

一个多参数的 Hilbert 型积分不等式①

杨必成

广东教育学院 数学系，广州 510303

摘要： 引入两对共轭指数及单参数 λ，通过估算权函数，对一个新的 Hilbert 型积分不等式作具有最佳常数因子的推广. 作为应用，考虑了其等价式及逆向形式.

关 键 词： Hilbert 型积分不等式；最佳值；等价式；逆向形式；Hölder 不等式

中图分类号：O178 **文献标识码：A**

设(p, q)为共轭指数$(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$[1]，$p>1$，$f, g$ 为$(0, \infty)$的非负可测函数,且

$$0<\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$$

$$0<\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$$

则有如下 Hardy-Hilbert 积分不等式[2]：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

这里,常数因子$\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$是最佳值. 不等式(1)在分析学有重要的应用[3]. 2000 年，文献[4]引入参数$\lambda>2-\min\{p, q\}$ 及 Beta 函数 $B(u, v)$，推广(1)为

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<k_\lambda(p)\left(\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{1-\lambda}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

这里，$k_\lambda(p)=B\left(\frac{p+\lambda-2}{p}, \frac{q+\lambda-2}{q}\right)$为最佳值. 文献[5,6]还考虑了式(2)及级数形式在共轭指数$(0<p<1)$下的逆形式. 2005 年，文献[7]再引入共轭指数(r, s) $(r>1, \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1)$，推广(2)为：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$<B\left(\frac{\lambda}{r}, \frac{\lambda}{s}\right)\left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

这里，$B\left(\frac{\lambda}{r}, \frac{\lambda}{s}\right)$为最佳值. 当$\frac{1}{r}=\frac{p+\lambda-2}{p\lambda}$，$\frac{1}{s}=\frac{q+\lambda-2}{q\lambda}$时，式(3)变为(2).

在与(1)相同条件下，还有如下具有最佳常数因子(p^2+q^2)的 Hilbert 型积分不等式[8]：

① 收稿日期：2006-10-10
基金项目：广东教育学院教授博士专项经费资助项目.
作者简介：杨必成(1947-)，男，广东汕尾人，教授，主要从事可和性、算子理论、解析不等式方面的研究.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(y)}{\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<(p^2+q^2)\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

本文借鉴文献[7]的方法，估算权函数，推广式(4)为类似(3)的最佳形式，并考虑等价式及逆向形式.

定理 1 若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$r>1$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，$\lambda>0$，$f$，$g$ 为$(0,\infty)$的非负可测函数，且

$$0<\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$$

$$0<\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$$

则有如下等价不等式：

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(y)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&<\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\int_0^\infty y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<\left(\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\right)^p\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

这里，常数因子$\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}$与$\left(\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\right)^p$都是最佳值. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，有如下等价式：

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(y)}{\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&<(r^2+s^2)\left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{s}-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{\frac{q}{r}-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty y^{\frac{p}{s}-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<(r^2+s^2)^p\int_0^\infty x^{\frac{p}{s}-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

证 配方，由带权的 Hölder 不等式[1]，有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(y)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x,y\})^\lambda}\left[\frac{x^{\frac{(1-\frac{\lambda}{r})}{q}}}{y^{\frac{(1-\frac{\lambda}{s})}{p}}}f(x)\right]\left[\frac{y^{\frac{(1-\frac{\lambda}{s})}{p}}}{y^{\frac{(1-\frac{\lambda}{g})}{q}}}f(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x,y\})^\lambda}\frac{x^{\frac{(1-\frac{\lambda}{r})p}{q}}}{y^{(1-\frac{\lambda}{s})}}f^p(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\times\\&\quad\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x,y\})^\lambda}\frac{y^{\frac{(1-\frac{\lambda}{s})q}{p}}}{x^{(1-\frac{\lambda}{r})}}g^q(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{9}$$

若式(9)取等号，根据文献[1]，则有不全为 0 的实数 A 与 B，使

$$A\frac{x^{\frac{(1-\frac{\lambda}{r})p}{q}}}{y^{(1-\frac{\lambda}{s})}}f^p(x)=B\frac{y^{\frac{(1-\frac{\lambda}{s})q}{p}}}{x^{(1-\frac{\lambda}{r})}}g^q(y)\qquad \text{a. e. }(0,\infty)\times(0,\infty)$$

即有实数 C，使 $Ax^{p(1-\frac{\lambda}{r})}f^p(x)=By^{q(1-\frac{\lambda}{s})}g^q(y)=C$，a. e. $(0,\infty)$. 不妨设 $A\neq0$，则有

$$x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)=\frac{C}{Ax}\qquad \text{a. e. }(0,\infty)$$

这矛盾于 $0 < \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{s})-1} f^p(x)\mathrm{d}x < \infty$.

定义权函数 $\omega(s, x)$ $(s > 1; x \in (0, \infty))$ 为：

$$\omega(s, x) = \int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x, y\})^\lambda} \cdot \frac{x^{\lambda-\frac{\lambda}{s}}}{y^{1-\frac{\lambda}{s}}}\mathrm{d}y \tag{10}$$

故式(9) 可改写成

$$I < \left(\int_0^\infty \omega_\lambda(s, x) x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \omega_\lambda(r, y) y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1} g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

作变换 $u = \frac{y}{x}$，可算得

$$\begin{aligned}\omega(s, x) &= \int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x, y\})^\lambda} \cdot \frac{x^{\lambda-\frac{\lambda}{s}}}{y^{1-\frac{\lambda}{s}}}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \frac{|\ln u|}{(\max\{1, u\})^\lambda} u^{-1+\frac{\lambda}{s}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{s}{\lambda}\int_0^1 (-\ln u)\mathrm{d}u^{\frac{\lambda}{s}} - \frac{r}{\lambda}\int_1^\infty (\ln u)\mathrm{d}u^{-\frac{\lambda}{r}} = \frac{1}{\lambda^2}(r^2 + s^2)\end{aligned} \tag{12}$$

在(12) 中，还可得 $\omega(r, y) = \frac{1}{\lambda^2}(r^2 + s^2)$. 把(12) 与该结果代入(11)，可得式(5).

设 $0 < \varepsilon < \frac{q\lambda}{s}$，$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) = 0$，$x \in (0, 1)$；$\tilde{f}(x) = x^{\frac{\lambda}{r}-1-\frac{\varepsilon}{p}}$，$\tilde{g}(x) = x^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}$，$x \in [1, \infty)$. 有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)}{(\max\{x, y\})^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_1^\infty x^{\frac{\lambda}{r}-1-\frac{\varepsilon}{p}}\left[\int_1^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x, y\})^\lambda} y^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\left(\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{|\ln u|}{(\max\{1, u\})^\lambda} u^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\left(\int_0^\infty \frac{|\ln u|}{(\max\{1, u\})^\lambda} u^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{|\ln u|}{(\max\{1, u\})^\lambda} u^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{|\ln u|}{(\max\{1, u\})^\lambda} u^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u - \int_1^\infty x^{-1}\left(\int_0^{\frac{1}{x}} (-\ln u) u^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{|\ln u|}{(\max\{1, u\})^\lambda} u^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u + \left(\frac{\lambda}{s} - \frac{\varepsilon}{q}\right)^{-2}\int_1^\infty \left(\ln x + \left(\frac{\lambda}{s} - \frac{\varepsilon}{q}\right)^{-1}\right)\mathrm{d}x^{-\frac{\lambda}{s}+\frac{\varepsilon}{q}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{r^2 + s^2}{\lambda^2} + o(1)\right) - O(1) \ (\varepsilon \to 0^+)\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $u = \frac{y}{x}$.

若式(5) 的最佳常数因子 $K \leqslant \frac{r^2 + s^2}{\lambda^2}$，则用 K 代 $\frac{r^2 + s^2}{\lambda^2}$，$\tilde{f}$，$\tilde{g}$ 代 f，g，(5) 仍成立. 于是由(13)，有

$$\left(\frac{r^2 + s^2}{\lambda} + o(1)\right) - \varepsilon O(1) \leqslant \varepsilon I < \varepsilon K \times \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}\tilde{g}^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = K$$

因而有 $\frac{r^2 + s^2}{\lambda^2} \leqslant K$ $(\varepsilon \to 0^+)$. 故式(5) 的最佳常数因子为 $K = \frac{r^2 + s^2}{\lambda^2}$.

当 T 足够大时，有 $\int_0^T x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1} f^p(x)\mathrm{d}x > 0$. 设

$$g(T, y) = y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^T \frac{|\ln(\frac{x}{y})| f(x)}{(\max\{x, y\})^\lambda}\mathrm{d}x\right]^{p-1} > 0$$

则由式(5)，有

$$
\begin{aligned}
&0<\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(T,y)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^T y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^T\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\\
&=I(T)=\int_0^T\int_0^T\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(T,y)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&<\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^T x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(T,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}\tag{14}
$$

$$
\left(\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(T,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^T x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\tag{15}
$$

故

$$
0<\int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(\infty,y)\mathrm{d}y<\infty
$$

当 $T\to\infty$ 时，由(5)知，(14),(15)保留严格不等号. 故有(6).

反之，由 Hölder 不等式[1]，有

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^\infty\left[y^{\frac{\lambda}{s}-\frac{1}{p}}\int_0^\infty\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\right](y^{\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{s}}g(y))\mathrm{d}y\\
&\leqslant\left[\int_0^\infty y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^\infty\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}}(y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(y)\mathrm{d}y)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}\tag{16}
$$

再由(6)，有(5)，故式(5)与(6)等价.

若(6)的常数因子不是最佳值，则由(16)可得出(5)的常数因子也不是最佳值的矛盾.

定理 2 若 $0<p<1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$r>1$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，$\lambda>0$，$f,g$ 为$(0,\infty)$的非负可测函数，且

$$
0<\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty
$$

$$
0<\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(x)dx<\infty
$$

则有如下等价不等式：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(y)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&>\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}\tag{17}
$$

$$
\int_0^\infty y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^\infty\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p dy>\left(\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\right)^p\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)\mathrm{d}x\tag{18}
$$

$$
\int_0^\infty x^{\frac{q\lambda}{r}-1}\left[\int_0^\infty\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}\mathrm{d}y\right]^q dx>\left(\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\right)^q\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(x)\mathrm{d}x\tag{19}
$$

这里，常数因子$\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}$与$\left(\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\right)^l$($l=p,q$)都是最佳值. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，有如下等价式：

$$
\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)g(y)}{\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>(r^2+s^2)\left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{s}-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{\frac{q}{r}-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\tag{20}
$$

$$\int_0^\infty y^{\frac{p}{s}-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{\max\{x,y\}}dx\right]dy > (r^2+s^2)^p\int_0^\infty x^{\frac{p}{s}-1}f^p(x)dx \tag{21}$$

$$\int_0^\infty x^{\frac{q}{r}-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|g(y)}{\max\{x,y\}}dy\right]^q dx < (r^2+s^2)^q\int_0^\infty x^{\frac{q}{g}-1}g^q(x)dx \tag{22}$$

证　类似于式(9)的配方，并由带权的逆向 Hölder 不等式[1]，同法可证得

$$I > \left(\int_0^\infty \omega_\lambda(s,x)x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \omega_\lambda(r,y)y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \tag{23}$$

再由(12)，可得(17)．对于 $\varepsilon>0$ 足够小，仍由定理 1 的证明一样构造 $\widetilde{f}$，$\widetilde{g}$，则可得

$$\begin{aligned}\widetilde{I} &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(y)}{(\max\{x,y\})^\lambda}dxdy \\ &\leqslant \int_1^\infty x^{\frac{\lambda}{r}-1-\frac{\varepsilon}{p}}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|}{(\max\{x,y\})^\lambda}y^{\frac{\lambda}{s}-1-\frac{\varepsilon}{q}}dy\right]dx \\ &= \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\left(\int_0^\infty \frac{|\ln u|}{(\max\{1,u\})^\lambda}u^{\frac{\lambda}{s}-1\frac{\varepsilon}{q}}du\right]dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}+o(1)\right)\ (\varepsilon\to 0^+)\end{aligned} \tag{24}$$

若(17)的最佳常数因子 $k\geqslant\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}$，则用 k，$\widetilde{f}$，$\widetilde{g}$ 代替$\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}$，$f$，$g$，(17)仍成立．于是由(24)，有

$$\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}+o(1)\geqslant\varepsilon I>\varepsilon k\left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}\widetilde{f}^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}\widetilde{g}^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}=k$$

因而$\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\geqslant k$ $(\varepsilon\to 0^+)$．故 $k=\frac{r^2+s^2}{\lambda^2}$ 为(17)的最佳常数因子．

仍设 $g(T,y)=y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^T \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}dx\right]^{p-1}>0$．由式(17)，因 $p>0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(T,y)dy &= \int_0^T y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^T \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}dx\right]^p dy=I(T) \\ &> \frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^T x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(T,y)dy\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{25}$$

$$\left(\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(T,y)dy\right)^{\frac{1}{p}} > \frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^T x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{26}$$

当 $T\to\infty$ 时，若$\int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(\infty,y)dy=\infty$，则式(26)保持严格不等号；若

$$0<\int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(\infty,y)dy<\infty$$

则由(17)知，式(25)，(26)仍保留严格不等号，故式(18)成立．

反之，类似于(16)的配方，由逆向 Hölder 不等式[1]，有

$$I\geqslant\left[\int_0^\infty y^{\frac{p\lambda}{s}-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{x}{y})|f(x)}{(\max\{x,y\})^\lambda}dx\right]^p dy\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}g^q(y)dy\right)^{\frac{1}{q}} \tag{27}$$

再由(18)，有(17)．故式(17)与(18)等价．若(18)的常数因子不是最佳值，则由(27)可得出(17)的常数因子也不是最佳值的矛盾．

设 $f(T,x)=x^{\frac{q\lambda}{r}-1}\left[\int_0^T \frac{|\ln(\frac{x}{y})|g(y)}{(\max\{x,y\})^\lambda}dy\right]^{q-1}>0$．则由上面证法可得类似于(25)的式子及

$$\left(\int_0^T x^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1} f^p(T, x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} > \frac{r^2+s^2}{\lambda^2}\left(\int_0^T y^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1} g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \tag{28}$$

再由 $q<0$，将 28 式两边乘方，当 $T\to\infty$，类似上法可证得式(19) 成立. 再建立类似于(27) 的式子可证得式(17) 与(19) 等价及式(19) 的常数因子是最佳值，故式(17)，(18) 与(19) 等价. 证毕.

注 当 $r=q$，$s=p$ 时，式(7) 变为式(4)；当 $r=p$，$s=q$ 时，式(7) 变为式(4) 的如下对偶式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right| f(x)g(y)}{\max\{x, y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < (p^2+q^2)\left(\int_0^\infty x^{p-2} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q-2} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{29}$$

一般地，当式(5) 的共轭指数(r，s) 取一组特定值时，就得到一个含最佳常数因子的不等式. 这说明，双共轭指数(p，q)，(r，s) 的引入对 Hilbert 型不等式的推广应用研究有特殊重要的意义.

参考文献：

[1] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南：山东科学技术出版社，2004.

[2] Hardy G H，Littlewood J E，Polya G. Inequalities[M]. Cambridge：Cambridge Univ. Press，1934.

[3] Mitrinovic D S，Pecaric J E，Fink A M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives[M]. Boston：Kluwer Academic Publishers，1991.

[4] 杨必成. 一个推广的具有最佳常数因子的 Hardy-Hilbert 积分不等式[J]. 数学年刊，2000，21A(4)：401－408.

[5] 杨必成. 一个反向的 Hardy-Hilbert 积分不等式[J]. 吉林大学学报(理)，2004，42(4)：489－493.

[6] 杨必成. 一个 Hardy-Hilbert 型不等式的逆[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(6)：1012－1015.

[7] Bicheng Yang，Ilko Brnetic，Mario，Josip Pecaric. Generalization of Hilbert and Hardy-Hilbert integral inequalities[J]. Mathematical Inequalities and Applications，2005，8(2)：259－272.

[8] 杨必成. 关于一个基本的 Hilbert 型不等式[J]. 广东教育学院学报(自然科学版)，2006，26(3)：1－5.

On a Hilbert-Type Integral Inequality with Multiple-Parameters

YANG Bi-cheng

Dept. of Mathematics，Guangdong Education Institute，Guangzhou 510303，China

Abstract：By introducing two pairs of conjugate exponents and a parameter λ and estimating the weight function，an extension of the new Hilbert-type integral inequality with a best constant factor is proved. As applications，the equivalent forms and some reverse forms are considered.

Key words：Hilbert-type integral inequality；best value；equivalent form；reverse form；Hölder's inequality

责任编辑 覃吉康