文章编号：1000-5471(2007)05-0027-06

带有二次非线性项的耦合薛定谔方程组的精确解①

许丽萍[1]， 杨德五[1]， 李晓燕[2]

1. 河南科技大学 理学院，河南 洛阳 471003；2. 山东交通学院 数理系，济南 250023

摘要：通过几个变换，借助于多个辅助方程新的精确解，导出了具有二次非线性项的耦合薛定谔方程组的一些精确解，包括三角函数解，钟状、扭状孤波解以及 Weierstrass 椭圆函数解.

关 键 词：具有二次非线性项的耦合薛定谔方程组；变换；辅助方程；精确解

中图分类号：O175.2 **文献标识码**：A

非线性演化方程精确解的研究在理论和应用上都有重要的价值，长期以来一直受到应用数学家和物理学家的极大关注，发展了许多有效求精确解的方法[1-7].

近年来，有关薛定谔方程的研究受到了数学物理学家的普遍关注，这方面的理论及实验研究已取得巨大的成果[8-11]. 而耦合非线性薛定谔方程更是一个研究的热点问题[12,13].

本文通过几个变换，借助于多个辅助方程新的精确解，考虑如下形式的带有二次非线性项的耦合薛定谔方程组[14,15] 的精确解.

$$\begin{cases} iu_{1z} - \alpha \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x} + u_1^* u_2 \exp[-i\beta z] = 0 \\ iu_{2z} - \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x} + u_1^2 \exp[i\beta z] = 0 \end{cases} \tag{1}$$

这里 $u_1 = u_1(x, z)$ 和 $u_2 = u_2(x, z)$ 表示两耦合光纤中的孤子波包，x，z 分别表示距离和时间，α 和 β 是常数. 该方程组描述了在非临界周[位]相匹配的条件下，光纤通信中一些慢变包络波的传播，寻求该方程组的精确解对于物理学家从深层次上了解慢变包络波传播意义重大.

1 一个等价常微分方程的导出

首先，我们做如下变换：

令

$$u_1(x, z) = u_1(\xi) = g(\xi)\exp[i\eta_1] \qquad u_2(x, z) = u_2(\xi) = h(\xi)\exp[i\eta_2] \tag{2}$$

$$\xi = x + 2\alpha k_1 z \qquad \eta_i = k_i x + \omega_i z \qquad i = 1, 2,\ k_2 = 2k_1,\ \omega_2 = 2\omega_1 + \beta \tag{3}$$

这里 $g(\xi)$ 和 $h(\xi)$ 是待定的实函数，k_1 和 ω_1 是待定的常数. 把(2)，(3) 式代入方程组(1)，分离其实部和虚部，此时方程组(1) 转化为等价的方程组

$$\begin{cases} \alpha g'' + (\omega_1 - \alpha k_1^2) g - gh = 0 \\ \alpha h'' + 2(2\omega_1 + \beta - 2\alpha k_1^2) h - 2g^2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

令

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} h(\xi) \qquad \omega_1 = -\frac{2}{3}\beta + \alpha k_1^2 \tag{5}$$

① 收稿日期：2006-11-30

基金项目：河南省教育厅自然科学基金资助项目 (2006110002)；河南科技大学科研基金资助项目 (2006ZY001；2006ZY011)；山东交通学院校科研基金资助项目.

作者简介：许丽萍(1972-)，女，河南洛阳人，讲师，硕士，主要从事非线性数学物理问题的研究.

则方程组(4) 就转化为关于 $h(\xi)$ 的一个常微分方程

$$\alpha h''-\frac{2}{3}\beta h-h^2=0 \tag{6}$$

显然，只要求出方程(6) 的解，借助于变换(2) ～(5) 就可以得到方程组(1) 的解.

2 方程(6) 的精确解

2.1 方程(6) 的第一种类型解

为了求解方程(6)，考虑方程(6) 中最高阶导数项 h'' 和非线性项 h^2 的齐次平衡，可假设方程(6) 有解

$$h(\xi)=a_0+a_1F(\xi)+a_2F^2(\xi) \tag{7}$$

其中 a_0, a_1 为待定常数，$F(\xi)$ 满足常微分方程

$$F'^2(\xi)=q_0+q_1F(\xi)+q_2F^2(\xi)+q_3F^3(\xi)+q_4F^4(\xi) \tag{8}$$

把(7) 式代入到方程(6)，并利用辅助方程(8)，把方程 (6) 的左端化为关于 $F(\xi)$ 的多项式，令 $F(\xi)$ 的各次幂的系数为零，可得如下的非线性方程组

$$\frac{q_1}{2}\alpha a_1+2\alpha q_0a_2-\frac{2}{3}\beta a_0-a_0^2=0$$

$$\alpha q_2a_1+3\alpha q_1a_2-\frac{2}{3}\beta a_1-2a_0a_1=0$$

$$\frac{3}{2}q_3\alpha a_1+4\alpha q_2a_2-\frac{2}{3}\beta a_2-a_1^2-2a_0a_2=0$$

$$2q_4\alpha a_1+5q_3\alpha a_2-2a_1a_2=0$$

$$6\alpha q_4a_2-a_2^2=0$$

求解上述方程组，得解如下：

情形 A 如果 $\frac{\beta}{\alpha}<0$，此时

① $a_0=-\frac{2}{3}\beta$，$a_1=3\alpha q_3$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=0$，$q_4=-\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\beta}q_3^2$，$q_2=-\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_3=-2\sqrt{q_2q_4}$，$q_3\leqslant 0$；

② $a_0=-\frac{2}{3}\beta$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=-\frac{1}{6}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_4=-q_2$；

③ $a_0=-\frac{2}{3}\beta$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=-\frac{1}{6}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_4\neq 0$；

④ $a_0=0$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=\frac{1}{6}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_4>0$.

特别地，如果 $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{6}$，那么 $a_0=-\frac{2}{3}\beta$，$a_1=3\alpha q_3$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=0$，$q_2=4$，$q_3=-4(2b\pm c)$，$q_4=(2b\pm c)^2$；

如果 $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{24}$，则 $a_0=-\frac{2}{3}\beta$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=4$，$q_4=a^2-4b^2$.

情形 B 如果 $\frac{\beta}{\alpha}>0$，此时

⑤ $a_0=0$，$a_1=3\alpha q_3$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=0$，$q_4=\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\beta}q_3^2$，$q_2=\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_3=-2\sqrt{q_2q_4}$，$q_3\leqslant 0$；

⑥ $a_0=0$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=\frac{1}{6}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_4=-q_2$；

⑦ $a_0=0$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=\frac{1}{6}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_4\neq 0$；

⑧ $a_0=-\frac{2}{3}\beta$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=-\frac{1}{6}\frac{\beta}{\alpha}$，$q_4>0$.

特殊的，如果 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{6}$，则 $a_1=3\alpha q_3$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=0$，$q_2=4$，$q_3=-4(c\pm 2b)$，$q_4=(c\pm 2b)^2$.

而当$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{24}$时，$a_0=0$，$a_1=0$，$a_2=6\alpha q_4$，$q_0=q_1=q_3=0$，$q_2=4$，$q_4=a^2-4b^2$.

依据情形 A 和 B，借助附表 1，把上述解代入(7)式，就得到方程(6)丰富的精确解.

如果$\frac{\beta}{\alpha}<0$，方程(6)有扭状、钟状以及三角函数形式的精确解：

$$h_1(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]-4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]^2$$

$$h_2(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+\beta\operatorname{sech}^4\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_3(\xi)=-\frac{2}{3}\beta-\beta\operatorname{csch}^2\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_4(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+\beta\operatorname{sech}^4\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_5(\xi)=\beta\csc^2\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

特殊的，如果$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{6}$，则方程(6)有解：

$$h_6(\xi)=-\frac{2}{3}\beta-12\alpha(2b+c)\frac{\operatorname{sech}^2\xi}{b\operatorname{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}+6\alpha(2b+c)^2\left[\frac{\operatorname{sech}^2\xi}{b\operatorname{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}\right]^2$$

$$h_7(\xi)=-\frac{2}{3}\beta-12(2b-c)\alpha\frac{\operatorname{csch}^2\xi}{b\operatorname{csch}^2\xi\pm c\coth\xi+c}+6\alpha(2b-c)^2\left[\frac{\operatorname{csch}^2\xi}{b\operatorname{csch}^2\xi\pm c\coth\xi+c}\right]^2$$

而若$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{24}$，则方程(6)有解：

$$h_8(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+6\alpha(a^2-4b^2)\left[\frac{\operatorname{sech}^2\xi}{b\operatorname{sech}^2\xi+a\tanh\xi-2b}\right]^2$$

$$h_9(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+6\alpha(a^2-4b^2)\left[\frac{\operatorname{csch}^2\xi}{b\operatorname{csch}^2\xi+a\coth\xi+2b}\right]^2$$

如果$\frac{\beta}{\alpha}>0$，方程(6)有解：

$$h_{10}(\xi)=-4\beta q_3^2\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]+4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]^2$$

$$h_{11}(\xi)=-\beta\operatorname{sech}^4\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_{12}(\xi)=\beta\operatorname{csch}^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_{13}(\xi)=-\beta\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_{14}(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+\beta\csc^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi$$

$$h_{15}(\xi)=-12\alpha(2b+c)\frac{\operatorname{sech}^2\xi}{b\operatorname{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}+6\alpha(2b+c)^2\left[\frac{\operatorname{sech}^2\xi}{b\operatorname{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}\right]^2$$

$$h_{16}(\xi)=-12(2b-c)\alpha\frac{\operatorname{csch}^2\xi}{b\operatorname{csch}^2\xi\pm c\coth\xi+c}+6\alpha(2b-c)^2\left[\frac{\operatorname{csch}^2\xi}{b\operatorname{csch}^2\xi\pm c\coth\xi+c}\right]^2$$

在上述解中$\xi=x+2\alpha k_1 z$，k_1 是任意常数.

2.2　方程(6)的第二种类型解

采用 2.1 中的思想和方法，设方程(6)有如下形式的解：

$$h(\xi)=b_0+b_1F(\xi)\tag{9}$$

这里 a_0,a_1,a_2 是待定的常数，而 $F(\xi)$ 则满足如下的常微分方程：

$$F'^2(\xi)=q_0+q_1F(\xi)+q_2F^2(\xi)+q_3F^3(\xi)\tag{10}$$

类似于2.1，借助于附表1，可得到方程(6)的三角函数解以及Weierstrass椭圆函数解.

$$h_{17}(\xi)=-\frac{2}{3}\beta+\beta\sec^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi \qquad \frac{\beta}{\alpha}>0$$

$$h_{18}(\xi)=-\frac{1}{3}\beta+6\alpha p[\xi;\ g_2,\ g_3]$$

在上述解中 $\xi=x+2\alpha k_1 z$，k_1 为任意常数. 其中 $p[\xi;\ g_2,\ g_3]$ 是Weierstrass椭圆函数，它满足微分方程 $p'(\xi)=\sqrt{4p^3(\xi)-g_2p(\xi)-g_3}$，这里的 $g_2=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\beta}{\alpha}$，$g_3$ 是任意常数.

3 方程(1)的精确解

将方程(6)的18组解利用变换(2)～(5)，可得到方程组(1)的18组精确解，其中包括以三角函数形式、双曲函数以及weiertrass椭圆函数所表示的各种包络波解等.

限于文章的篇幅，我们这里仅列出部分解.

如果 $\frac{\beta}{\alpha}<0$，方程组(1)有解

$$1^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{2}{3}\beta+4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]-4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]^2\right\}\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left\{-\frac{2}{3}\beta+4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]-4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]^2\right\}\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

$$2^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2}{3}\beta+\beta\ \mathrm{sech}^4\ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left[-\frac{2}{3}\beta+\beta\ \mathrm{sech}^4\ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

$$3^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2}{3}\beta-\beta\ \mathrm{csch}^2\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left[-\frac{2}{3}\beta-\beta\ \mathrm{csch}^2\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

$$4^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\beta\ \csc^2\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left[\beta\ \csc^2\sqrt{-\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

特别的，如果 $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{6}$，则方程组(1)有解

$$5^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{2}{3}\beta-12\alpha(2b+c)\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}+6\alpha(2b+c)^2\left[\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}\right]^2\right\}\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left\{-\frac{2}{3}\beta-12\alpha(2b+c)\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}+6\alpha(2b+c)^2\left[\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}\right]^2\right\}\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

如果 $\frac{\beta}{\alpha}>0$ 时，可得方程组(1)的精确解为：

$$6^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-4\beta q_3^2\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]+4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]^2\right\}\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left\{-4\beta q_3^2\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]+4\beta\left[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\xi\right)\right]^2\right\}\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

$$7^0\begin{cases}u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\beta\ \mathrm{sech}^4\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right\}\exp[i\eta_1]\\ u_2(x,z)=\left\{-\beta\ \mathrm{sech}^4\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right\}\exp[i\eta_2]\end{cases}$$

$$8^0\begin{cases} u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\beta\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right\}\exp[i\eta_1] \\ u_2(x,z)=\left\{-\beta\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right]\exp[i\eta_2] \end{cases}$$

$$9^0\begin{cases} u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-12\alpha(2b+c)\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}+6\alpha(2b+c)^2\left[\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}\right]^2\right\}\times\exp[i\eta_1] \\ u_2(x,z)=\left\{-12\alpha(2b+c)\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}+6\alpha(2b+c)^2\left[\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{b\,\mathrm{sech}^2\xi\pm c\tanh\xi+c}\right]^2\right\}\times\exp[i\eta_2] \end{cases}$$

$$10^0\begin{cases} u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{2}{3}\beta+\beta\sec^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right\}\exp[i\eta_1] \\ u_2(x,z)=\left\{-\frac{2}{3}\beta+\beta\sec^2\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}\xi\right\}\exp[i\eta_2] \end{cases}$$

如果$\frac{\beta}{\alpha}$是任意的常数，则得到方程组(1) 的精确解为：

$$11^0\begin{cases} u_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{3}\beta+6\alpha p[\xi;\ g_2,\ g_3)]\right\}\exp[i\eta_1] \\ u_2(x,z)=\left\{-\frac{1}{3}\beta+6\alpha p[\xi;\ g_2,\ g_3)]\right\}\exp[i\eta_2] \end{cases}$$

在上述解中，k_1，ω_1 是任意常数，$\xi=x+2\alpha k_1z$，$\eta_i=k_ix+\omega_iz$，$(i=1,2)$，$k_2=2k_1$，$\omega_2=2\omega_1+\beta$.

参考文献：

[1] Ablowitz M J，Clarkson P A，Solitons，Nonlinear Evolution Equations and inverse Scattering Transform [M]. Cambridge：Cambridge Univ. Press，1991.

[2] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations [J]. Phys Lett A，2001，289(10)：69－74.

[3] Wang M L. Solitary wave solutions for variant Bossinesq equations [J]. Phys Lett A，1995，199(3)：169－172

[4] Parks E J，Duffy B R. An automated tanh－function method for finding solitary wave solutions to non－linear evolution equations [J] . Comput Phys Commun，1996，98(3)：288－300.

[5] Fan E G. Extended tanch-function method and its applications to nonlinear equations [J]. phys Lett A，2000，277(4)：212－218.

[6] Wang M L，Zhou Y B. The Periodic wave solutions for the Klein-Gordon-Schrodinger equations [J] . Phys Lett A，2003，318(1)：84－92.

[7] Wang M L，Li X Z. Applications of F-expansion to periodic wave solutions for a new Hamiltonian amplitude equation [J] . Chaos，Solitons & Fractals，2005，24(5)：1257－1268.

[8] Hasegawa A，Tappert F D. Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. I. Anomalous dispersion [J]. Appl Phys Lett ，1973 ，23：142－144.

[9] Hasegawa A，Tappert F D. Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. II. Normal Dispersion [J]. Appl Phys Lett，1973，23：171－172.

[10] Mollenouer L F. Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers [J]. Phys Rev Lett，1980，45：1095－1098.

[11] Emplit P. Picosecond Steps and Dark Pulses Through Nonlinear Single Mode Fibers [J]. Opt Commun，1987，62：374－376.

[12] 张善卿，李志斌. 非线性耦合 Schrödinger-kdv 方程组的新的精确解析解 [J]. 物理学报，2002，51(10)：2197－2201.

[13] 张金良，李向正，王明亮. 两个非线性耦合方程组的复 tanch 函数解 [J]. 工程数学学报，2005，22(4)：725－728.

[14] Baboiu DM，Stegeman G I. Interaction of one-dimensional Bright Solitary Waves in Quadratic Media [J]. Opt Lett，1995，20：2282－2284.

[15] Buryak Alexander V，Trapani Paolo Di，Skryabin Dmitry V，et al. Optical Solitons Due to Qquadratic Nonlinearities ：From Basic Physics to Futuristic Applications [J]. Physics Reports，2002，370：63－235.

Exact Solutions to a Coupled Schrödinger Equations with a Quadratic Nonlinearity

XU Li-ping[1], YANG De-wu[1], LI Xiao-yan[2]

1. School of Science, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;
2. Dept. of Mathematics and Physics, Shangdong University of Communications, Jinan 250023, China

Abstract: Using several different function transformations, and then by using various solutions of some new differential sub-equations, many new exact solutions of the coupled schrödinger equations with a quadratic nonlinearity are explicitly obtained, which including triangle functions, the king, bell solitary wave envelope and Weierstrass elliptic function.

Key words: The coupled schrödinger equations with a quadratic nonlinearity; transformation; sub-equations; the exact solutions

附表 1 q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 与方程 $F'^2(\xi) = q_0 + q_1 F(\xi) + q_2 F^2(\xi) + q_3 F^3(\xi) + q_4 F^4(\xi)$ 的解 $F(\xi)$ 的关系

q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	$F(\xi)$
0	0	>0	$-2\sqrt{q_2 q_4}$	>0	$\sqrt{\frac{q_2}{q_4}}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{q_2}\xi\right)\right]$
0	0	>0	0	$-q_2$	$\operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\sqrt{q_2}\xi$
0	0	>0	0	>0	$\pm\sqrt{\frac{q_2}{q_4}}\operatorname{csch}(\sqrt{q_2}\xi)$
0	0	>0	0	<0	$\pm\sqrt{-\frac{q_2}{q_4}}\operatorname{sech}(\sqrt{q_2}\xi)$
0	0	<0	0	>0	$\pm\sqrt{-\frac{q_2}{q_4}}\csc(\sqrt{-q_2}\xi)$
0	0	>0	$\neq 0$	0	$-\frac{q_2}{q_3}\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{q_2}}{2}\xi$
0	0	>0	$\neq 0$	0	$\frac{q_2}{q_3}\operatorname{csch}^2 \frac{\sqrt{q_2}}{2}\xi$
0	0	<0	$\neq 0$	0	$-\frac{q_2}{q_3}\sec^2 \frac{\sqrt{-q_2}}{2}\xi$
0	0	4	$-4(2b+c)$	$(2b+c)^2$	$\frac{\operatorname{sech}^2\xi}{b\operatorname{sech}^2\xi \pm a\tanh\xi + c}$
0	0	4	$4(2b-c)$	a^2+4b^2-4bc	$\frac{\operatorname{csch}^2\xi}{b\operatorname{csch}^2\xi + a\tanh\xi + 2b}$
$-g_3$	$-g_2$	0	0	4	$F'(\xi) = p'(\xi) = \sqrt{4p^3(\xi) - g_2 p(\xi) - g_3}$

责任编辑 覃吉康