文章编号：1000－5471(2007)05－0022－05

具有阻尼项和分布时滞的二阶中立型泛函微分方程的振动性[①]

陈大学[1]，　周树清[2]，　刘兰初[1]，　龙玉花[1]

1. 湖南工程学院 数理系，湖南 湘潭 411104；2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院，长沙 410081

摘要： 考虑一类具有阻尼项和分布时滞的二阶中立型泛函微分方程的振动性，通过利用 Riccati 变换、引入参数函数和采用积分平均技术，获得了该类方程所有解振动的几个充分条件.

关　键　词： 中立型泛函微分方程；阻尼项；分布时滞；振动性

中图分类号： O175. 12　　　　**文献标识码：** A

讨论如下形式的具有阻尼项和分布时滞的二阶中立型泛函微分方程的振动性：

$$\{r(t)[x(t)+p(t)x(\tau(t))]'\}'+u(t)[x(t)+p(t)x(\tau(t))]'+\int_a^b F(t,\xi,x[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\delta(\xi)=0 \qquad t\geqslant t_0 \tag{1}$$

假设以下条件始终成立：

(H1) $r(t)\in C([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，$u(t)\in C([t_0,+\infty),R^+)$，$R^+=[0,+\infty)$；

(H2) $p(t)\in C([t_0,+\infty),[0,1])$；

(H3) $\tau(t)\in C([t_0,+\infty),R^+)$，$\tau(t)\leqslant t$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$；

(H4) $g(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],R^+)$，$g(t,\xi)\leqslant t$，$t\in[t_0,+\infty)$，$\xi\in[a,b]$，$g(t,\xi)$ 分别关于 t 和 ξ 非减，$\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant b}g(t,\xi)=+\infty$；

(H5) $F(t,\xi,x)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b]\times R,R)$，$\delta(\xi)\in C([a,b],R)$ 且 $\delta(\xi)$ 非减，方程(1) 中的积分是 Stieltjes 积分.

本文总假定所讨论的泛函微分方程的解 $x(t)$ 在区间$[t_0,+\infty)$ 上存在，并且对任何 $t_x\geqslant t_0$，都有

$$\sup\{|x(t)|:t\geqslant t_x\}>0$$

下面是方程(1) 的一些特殊情形：

$$[x(t)+p(t)x(t-\tau)]''+q(t)x(t-\sigma)=0 \qquad t\geqslant t_0 \tag{2}$$

$$\{r(t)[x(t)+p(t)x(t-\tau)]'\}'+q(t)f(x(t-\sigma))=0 \qquad t\geqslant t_0 \tag{3}$$

$$[x(t)+p(t)x(t-\tau)]''+\int_a^b q(t,\xi)x[g(t,\xi)]\mathrm{d}\delta(\xi)=0 \qquad t\geqslant t_0 \tag{4}$$

许多作者已经讨论了方程(2)～(4) 的振动性[1-4].

本文通过利用 Riccati 变换、引入参数函数和采用积分平均技术，获得了方程(1) 振动的几个充分条件.

定理 1　如果(H1)～(H5) 及下列条件成立：

(H6) $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{r(t)}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t=+\infty$；

① 收稿日期：2006－11－21

基金项目：国家自然科学数学天元基金资助项目(A0324632)；湖南省教育厅资助项目(06C242).

作者简介：陈大学(1966－)，男，湖南新邵人，硕士，副教授，主要从事微分方程理论及应用的研究.

(H7) 存在函数 $q(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],R^+)$，对任何 $\xi\in[a,b]$，$q(t,\xi)$ 关于 t 在 $[t_0,+\infty)$ 上不最终为零，存在函数 $f(x)\in C(R,R)$ 和常数 $K>0$，使得

$$F(t,\xi,x)\operatorname{sgn}x\geqslant q(t,\xi)f(x)\operatorname{sgn}x\qquad x\in R,\ \frac{f(x)}{x}\geqslant K,\ x\neq 0$$

(H8) $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\left\{\exp\int_{t_0}^{s}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s=+\infty$，

那么方程(1) 是振动的.

证　用反证法. 假设 $x(t)$ 是方程(1) 的一个非振动解. 若 $x(t)$ 是方程(1) 的一个最终正解，则不失一般性，可设 $t\geqslant t_0$ 时，$x(t)>0$. 令

$$\begin{cases}y(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))\\ U(t)=\exp\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\\ A(t)=r(t)y'(t)U(t)\qquad t\geqslant t_0\end{cases}\tag{5}$$

由(H3) 和(H4) 知，存在 $t_1>\max\{t_0,0\}$，使得

$$x(\tau(t))>0\qquad x[g(t,\xi)]>0\qquad t\geqslant t_1,\ \xi\in[a,b]\tag{6}$$

从而由(H2) 和(5) 得

$$y(t)\geqslant x(t)>0\qquad t\geqslant t_1\tag{7}$$

由(1),(H7) 和(5) 知

$$\begin{aligned}A'(t)=&\{[r(t)y'(t)]'+u(t)y'(t)\}U(t)=\left[-\int_a^b F(t,\xi,x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\delta(\xi)\right]U(t)\\ \leqslant&\left[-K\int_a^b q(t,\xi)x[g(t,\xi)]\mathrm{d}\delta(\xi)\right]U(t)\end{aligned}\tag{8}$$

从而
$$A'(t)\leqslant 0\qquad t\geqslant t_1\tag{9}$$

因此 $A(t)$ 在 $[t_1,+\infty)$ 上单调减少. 下面证明：

$$y'(t)\geqslant 0\qquad t\geqslant t_1\tag{10}$$

假设(10) 式不成立，则存在 $t_2\geqslant t_1$，使得 $y'(t_2)<0$. 从而有

$$r(t)y'(t)U(t)\leqslant r(t_2)y'(t_2)U(t_2)<0\qquad t\geqslant t_2$$

$$\int_{t_2}^{t}y'(v)\mathrm{d}v\leqslant r(t_2)y'(t_2)U(t_2)\int_{t_2}^{t}\frac{1}{r(v)U(v)}\mathrm{d}v\qquad t\geqslant t_2$$

$$y(t)\leqslant y(t_2)+r(t_2)y'(t_2)U(t_2)\int_{t_2}^{t}\frac{1}{r(v)U(v)}\mathrm{d}v\qquad t\geqslant t_2$$

注意到(H6)，令 $t\to+\infty$，得 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=-\infty$，这与(7) 矛盾，故(10) 成立.

由(H3) 和(H4) 知，存在 $t_3\geqslant t_1$，使得

$$t_1\leqslant\tau[g(t,\xi)]\leqslant g(t,\xi)\qquad t\geqslant t_3,\ \xi\in[a,b]\tag{11}$$

从而由(7),(10) 和(11) 知

$$x(\tau[g(t,\xi)])\leqslant y(\tau[g(t,\xi)])\leqslant y[g(t,\xi)]\qquad t\geqslant t_3,\ \xi\in[a,b]\tag{12}$$

这样，由(5),(8) 和(12) 得

$$\begin{aligned}A'(t)\leqslant&-KU(t)\int_a^b q(t,\xi)\{y[g(t,\xi)]-p[g(t,\xi)]x(\tau[g(t,\xi)])\}\mathrm{d}\delta(\xi)\\ \leqslant&-KU(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\delta(\xi)\qquad t\geqslant t_3\end{aligned}\tag{13}$$

由(10) 和(11) 得

$$A'(t)\leqslant-Ky(t_1)U(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\qquad t\geqslant t_3$$

在 $[t_3,t]$ $(t\geqslant t_3)$ 上对两边积分得

$$A(t)-A(t_3)\leqslant-Ky(t_1)\int_{t_3}^{t}\left\{U(S)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_3$$

注意到(H8)和(5)，令 $t\to+\infty$，得 $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=-\infty$. 这与 $t\geqslant t_1$ 时 $A(t)\geqslant 0$ 矛盾.

若 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终负解，令 $z(t)=-x(t)$，则方程(1)变为

$$\{r(t)[z(t)+p(t)z(\tau(t))]'\}'+u(t)[z(t)+p(t)z(\tau(t))]'+\int_a^b F^*(t,\xi,z[g(t,\xi)])\mathrm{d}\delta(\xi)=0 \qquad t\geqslant t_0 \tag{14}$$

其中 $F^*(t,\xi,z[g(t,\xi)])=-F(t,\xi,-z[g(t,\xi)])$. 易知 $z(t)$ 是方程(14)的一个最终正解. 令 $f^*(x)=-f(-x)$，$x\in R$，则 $F^*(t,\xi,x)=-F(t,\xi,-x)$ 和 $f^*(x)$ 满足 $F(t,\xi,x)$ 和 $f(x)$ 所满足的所有条件. 对 $z(t)$ 和方程(14)用上面的证明方法可导出矛盾. 定理1证毕.

定理 2 如果(H1)～(H7)及下列条件成立：

(H9) 令 $D_0=\{(t,s):t>s\geqslant t_0\}$，$D=\{(t,s):t\geqslant s\geqslant t_0\}$. 存在函数 $H(t,s)$，$h(t,s)\in C(D,R)$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，$H(t,t)\geqslant 0$. 当 $(t,s)\in D_0$ 时，$H(t,s)>0$，$\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\leqslant 0$ 且连续，$-\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}=h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$；

(H10) $g'(t,a)=\dfrac{\mathrm{d}g(t,a)}{\mathrm{d}t}$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在且大于零；

(H11) 存在函数 $\rho(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t\left\{H(t,s)\rho(s)\left[\exp\int_{t_0}^s\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right]\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right.$$
$$\left.-\frac{\left[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)\right]^2 r[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\exp\int_{t_0}^{g(s,a)}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}s=+\infty$$

那么方程(1)是振动的.

证 假设 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终正解，$y(t)$,$U(t)$ 和 $A(t)$ 如(5)定义. 由定理1的证明知，(13)成立，从而由(H4)和(10)得

$$A'(t)\leqslant -Ky[g(t,a)]U(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi) \qquad t\geqslant t_3 \tag{15}$$

由(H4),(5)和(9)得 $A(t)\leqslant A[g(t,a)]=r[g(t,a)]y'[g(t,a)]U[g(t,a)]$，$t\geqslant t_3$. 从而有

$$y'[g(t,a)]\geqslant\frac{A(t)}{r[g(t,a)]U[g(t,a)]} \qquad t\geqslant t_3 \tag{16}$$

令 $w(t)=\dfrac{A(t)}{y[g(t,a)]}$，$t\geqslant t_3$，那么 $w(t)\geqslant 0$，$t\geqslant t_3$. 由(15)和(16)知，对 $t\geqslant t_3$，有

$$\begin{aligned}w'(t)&=\frac{A'(t)}{y[g(t,a)]}-\frac{A(t)y'[g(t,a)]g'(t,a)}{y^2[g(t,a)]}\\&\leqslant -KU(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\frac{A^2(t)g'(t,a)}{y^2[g(t,a)]r[g(t,a)]U[g(t,a)]}\\&\leqslant -KU(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\frac{g'(t,a)}{r[g(t,a)]U[g(t,a)]}w^2(t)\end{aligned}$$

对 $t\geqslant t_3$，由(H9)得

$$\int_{t_3}^t\left\{KH(t,s)\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant -\int_{t_3}^t H(t,s)\rho(s)w'(s)\mathrm{d}s-\int_{t_3}^t H(t,s)\rho(s)\frac{g'(s,a)}{r[g(s,a)]U[g(s,a)]}w^2(s)\mathrm{d}s$$
$$=-[H(t,t)\rho(t)w(t)-H(t,t_3)\rho(t_3)w(t_3)]+\int_{t_3}^t w(s)[H_s'(t,s)\rho(s)+H(t,s)\rho'(s)]\mathrm{d}s-$$
$$\int_{t_3}^t H(t,s)\rho(s)\frac{g'(s,a)}{r[g(s,a)]U[g(s,a)]}w^2(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant H(t,t_3)\rho(t_3)w(t_3)-\int_{t_3}^t\sqrt{H(t,s)}[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]w(s)\mathrm{d}s-$$

$$\int_{t_3}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{g'(s,a)}{r[g(s,a)]U[g(s,a)]}w^2(s)\mathrm{d}s$$

$$= H(t,t_3)\rho(t_3)w(t_3)+\int_{t_3}^{t}\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4\rho(s)g'(s,a)}\mathrm{d}s-$$

$$\int_{t_3}^{t}\left\{\sqrt{H(t,s)\rho(s)\frac{g'(s,a)}{r[g(s,a)]U[g(s,a)]}w^2(s)}+\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]\sqrt{r[g(s,a)]U[g(s,a)]}}{2\sqrt{\rho(s)g'(s,a)}}\right\}^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant H(t,t_3)\rho(t_3)w(t_3)+\int_{t_3}^{t}\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4\rho(s)g'(s,a)}\mathrm{d}s$$

因为由(H9)知，当 $t>s\geqslant t_0$ 时，$H(t,s)$ 关于 s 单调减少，所以当 $t>t_3\geqslant t_0$时，有

$$\int_{t_3}^{t}\left\{KH(t,s)\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant H(t,t_0)\rho(t_3)w(t_3)+\int_{t_3}^{t}\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4\rho(s)g'(s,a)}\mathrm{d}s$$

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_3}^{t}\left\{H(t,s)\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\right.$$

$$\left.\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\right\}\mathrm{d}s\leqslant\frac{\rho(t_3)w(t_3)}{K}\tag{17}$$

注意到当 $t>s\geqslant t_0$ 时，$0<H(t,s)\leqslant H(t,t_0)$，$0<\dfrac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\leqslant 1$；对 $t>t_3\geqslant t_0$，由(17)得

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left\{H(t,s)\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\right.$$

$$\left.\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\right\}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{H(t,t_0)}\left(\int_{t_0}^{t_3}+\int_{t_3}^{t}\right)\left\{H(t,s)\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\right.$$

$$\left.\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\right\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t_3}\left\{\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s+\frac{\rho(t_3)w(t_3)}{K}$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t_3}\left\{\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s+\frac{\rho(t_3)w(t_3)}{K}\tag{18}$$

因(18)右端为常数，所以由(18)得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left\{H(t,s)\rho(s)U(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\right.$$

$$\left.\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]U[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\right\}\mathrm{d}s<+\infty\tag{19}$$

注意到(5)中 $U(t)$ 的表达式，可知(19)与(H11)矛盾. 若 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终负解，那么可采用与定理 1 的证明类似的方法推出矛盾. 定理 2 证毕.

由定理 2 容易得到下面的推论：

推论 1　如果(H1)～(H7),(H9),(H10)及以下条件成立：

(H12)存在函数 $\rho(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left\{H(t,s)\rho(s)\left[\exp\int_{t_0}^{s}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right]\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)\right\}\mathrm{d}s=+\infty$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{[h(t,s)\rho(s)-\sqrt{H(t,s)}\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\exp\int_{t_0}^{g(s,a)}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}s<+\infty$$

那么方程(1)是振动的.

注1 满足(H9)的函数 $H(t,s)$ 和 $h(t,s)$ 是很多的. 通过选择不同的 $H(t,s)$,$h(t,s)$ 和 $\rho(s)$, 由定理2和推论1就可以得到方程(1)的许多具体的振动准则. 例如, 如果分别选择 $H(t,s)=1$,$h(t,s)=0$ 和 $H(t,s)=(t-s)^2$,$h(t,s)=2$,$\rho(s)=1$, 那么由定理2可得以下两条推论:

推论2 如果(H1)~(H7),(H9),(H10)及以下条件成立:

(H13) 存在函数 $\rho(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$, 使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left\{\rho(s)\left[\exp\int_{t_0}^{s}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right]\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\frac{[\rho'(s)]^2 r[g(s,a)]}{4K\rho(s)g'(s,a)}\exp\int_{t_0}^{g(s,a)}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}s=+\infty$$

那么方程(1)是振动的.

推论3 如果(H1)~(H7),(H9),(H10)及以下条件成立:

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t}\left\{(t-s)^2\left[\exp\int_{t_0}^{s}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right]\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\delta(\xi)-\frac{r[g(s,a)]}{Kg'(s,a)}\exp\int_{t_0}^{g(s,a)}\frac{u(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}s=+\infty$$

那么方程(1)是振动的.

参考文献:

[1] Grammatikopoulos M K, Ladas G, Meimaridou A. Oscillation of second order neutral delay differential equations [J]. Rad Mat, 1985, 1: 267-274.

[2] Grace S R, Lalli B S. Oscillation of nonlinear second order neutral differential equations [J]. Rad Mat, 1987, 3: 77-84.

[3] Yu Y H, Fu X L. Oscillation of second order nonlinear neutral equation with continuous distributed deviating argument [J]. Rad Mat, 1991, 7: 167-176.

[4] Wang P, Li X. Further results on oscillation of a class of second order neutral equations [J]. J Comput Appl Math, 2003, 157: 407-418.

Oscillation of a Class of Second Order Neutral Functional Differential Equations with Distributed Delay and Damping Term

CHEN Da-xue[1], ZHOU Shu-qing[2], LIU Lan-chu[1], LONG Yu-hua[1]

1. Dept. of Mathematics and Physics, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan Hunan 411104, China;

2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China

Abstract: Consider the oscillation of a class of second order neutral functional differential equations with distributed delay and damping term, and obtain several sufficient conditions for the oscillation of all of its solutions by making use of Riccati transformation, introducing parameter function and using integral averaging technique.

Key words: neutral functional differential equation; damping term; distributed delay; oscillation

责任编辑 覃吉康