文章编号：1000－5471(2007)05－0014－04

Markov 积分半群的生成元①

赵文强[1]，　李　嘉[2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：讨论 Markov 积分半群的生成元与转移概率函数之间的性质. 给出了 Markov 积分半群的生成元的几种等价刻画，并用所得结果研究了 Kolmogorov 前项微分方程成立的条件.

关　键　词：转移概率函数；Markov 积分半群；生成元；前向微分方程

中图分类号：**O177.92**　　　**文献标识码**：**A**

设(Ω, F, P)是一完备概率空间，定义于其上的参数连续 Markov 链 $X_t = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 的状态空间 E 具有离散拓扑，通常取 E 为可数无限集合 $E = Z^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Markov 链 X_t 由转移概率函数 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 唯一确定. 这里，凡与 Markov 链有关的知识和符号见文献[1].

文献[2]把积分半群理论引入到 Markov 链，文献[3]讨论了 Markov 积分半群的限制，研究了转移概率函数的一些性质与 Markov 积分半群生成元之间的关系. 最近，文献[4]证明了 Markov 积分半群是一非退化的二阶弱* 连续可微半群.

设 l_∞ 空间上满足如下关系的向量的全体构成的子空间为 $\triangle$，即

$$\triangle = \{x \in l_\infty;\ \lim_{t \downarrow 0} \| P(t)x - x \|_\infty = \lim_{t \downarrow 0} \sup_{i \in E} | \sum_{j \in E} p_{ij}(t) x_j - x_i | = 0\} \tag{1}$$

易证明 $\triangle$ 完备，且转移概率函数 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 作为算子在 $\triangle$ 上的限制是一强连续半群. 本文得到了 Markov 积分半群的生成元是弱* 稠定的，并给出了 Markov 积分半群的生成元的几种等价刻画. 最后讨论了 Kolmogorov 前项微分方程成立与 Markov 积分半群生成元的关系.

引理 1[2]　设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是转移概率函数，定义 $G(t) = (g_{ij}(t))$，这里 $g_{ij}(t) = \int_0^t p_{ij}(s)\mathrm{d}s$，其中 $i, j \in E$，$t \geqslant 0$. 则 $G(t) = (g_{ij}(t))$ 是 l_∞ 上的压缩积分半群，称作 Markov 积分半群，生成元用 Ω 表示.

定理 1　设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是转移概率函数，$G(t)$ 代表相对应的 Markov 积分半群，其生成元用 Ω 表示. 则 $P(t)$ 作为 l_∞ 上的算子在 $\triangle$ 上的限制是 $\triangle$ 上的正的强连续压缩半群，其生成元为 Ω 在 $\triangle$ 中的部分 $\Omega|_\triangle$，也就是

$$D(\Omega|_\triangle) = \{x \in D(\Omega) \cap \triangle;\ \Omega x \in \triangle\}$$

并且对每一个 $x \in D(\Omega|_\triangle)$，$\Omega|_\triangle x = \Omega x$.

证　与文献[3]的定理 1 的证明类似，省略.

推论 1　设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是转移概率函数，$G(t)$ 表示对应的 Markov 积分半群，其生成元用 Ω 表示. 则对于每一个 $x \in l_\infty$，及 $t \geqslant 0$，$G(t)x = \int_0^t P(s)x\mathrm{d}s \in D(\Omega)$，并且

$$\Omega \int_0^t P(s)x\mathrm{d}s = P(t)x - x \tag{2}$$

特别的，$\left\{\int_0^t p_{ij}(s)\mathrm{d}s\right\}_{i \in E} \in D(\Omega)$，且

---

①　收稿日期：2007－01－18

作者简介：赵文强(1969－)，男，四川南江人，硕士，讲师，主要从事应用泛函分析的研究.

$$\Omega\left\{\int_0^t p_{ij}(s)\mathrm{d}s\right\}_{i\in E}=\{p_{ij}(t)-\delta_{ij}\}_{i\in E}$$

证　对于每一个 $x\in l_\infty$，及 $t\geqslant 0$，因为

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+}(P(s)G(t)x-G(t)x)&=\lim_{s\to 0^+}\left(\int_0^t P(s)P(\tau)x\mathrm{d}\tau-\int_0^t P(\tau)x\mathrm{d}\tau\right)\\&=\lim_{s\to 0^+}\left(\int_0^t P(s+\tau)x\mathrm{d}\tau-\int_0^t P(\tau)x\mathrm{d}\tau\right)\\&=\lim_{s\to 0^+}\left(\int_s^{s+t} P(\tau)x\mathrm{d}\tau+\int_0^t P(\tau)x\mathrm{d}\tau\right)\\&=\lim_{s\to 0^+}(G(s+t)x-G(s)x-G(t)x)=0\end{aligned}$$

所以 $G(t)x\in\triangle$，于是 $P(\tau)G(t)x$ 是关于 $\tau\geqslant 0$ 的连续函数. 因此 $G(s)G(t)x=\int_0^s P(\tau)G(t)x\mathrm{d}\tau$ 关于 $s\geqslant 0$ 可微，且 $G'(s)G(t)x=P(s)G(t)x$. 从而

$$\begin{aligned}G'(s)G(t)x-G(t)x&=P(s)\int_0^t P(\tau)\mathrm{d}s\tau-\int_0^t P(\tau)\mathrm{d}s\tau=\int_0^t P(s+\tau)\mathrm{d}s\tau-\int_0^t P(\tau)\mathrm{d}s\tau\\&=\int_s^{t+s} P(\tau)\mathrm{d}s\tau-\int_0^t P(\tau)\mathrm{d}s\tau=\int_s^0 P(\tau)\mathrm{d}s\tau+\int_t^{t+s} P(\tau)\mathrm{d}s\tau\\&=\int_s^0 P(\tau)\mathrm{d}s\tau+\int_0^s P(t+\tau)\mathrm{d}s\tau=\int_0^s P(\tau)P(t)\mathrm{d}s\tau-\int_0^s P(\tau)x\mathrm{d}\tau\\&=G(s)(P(t)x-x)\end{aligned}$$

因此由积分半群生成元的定义知，$G(t)x\in D(\Omega)$，且 $\Omega\int_0^t P(s)x\mathrm{d}s=P(t)x-x$. 证毕.

推论 2　设 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 是转移概率函数，$G(t)$ 表示对应的 Markov 积分半群，其生成元用 Ω 表示. 则当 $x\in D(\Omega)$ 时，$P(t)x\in D(\Omega)$，且

$$\Omega P(t)x=P(t)\Omega x \tag{3}$$

$$\Omega\int_0^t P(s)x\mathrm{d}s=\int_0^t P(s)\Omega x\mathrm{d}s=P(t)x-x \tag{4}$$

证　因为 $x\in D(\Omega)$，所以由积分半群生成元的定义，$G'(s)x-x=G(s)\Omega x$. 因此 $G(t)x$ 连续可微，故 $G'(s)x=P(s)x$. 于是

$$G'(s)P(t)x-P(t)x=P(t)(G'(s)x-x)=P(t)G(s)\Omega x=G(s)P(t)\Omega x$$

因此 $P(t)x\in D(\Omega)$，且 $\Omega P(t)x=P(t)\Omega x$，即(3)式成立. 又 Ω 是闭算子，于是由(2)式，再结合(3)式知(4)式成立. 证毕.

注 1　由定理 1 知，$D(\Omega|_\triangle)\subset D(\Omega)$. 又当 $x\in D(\Omega)$ 时，(4)式成立，于是在(4)式的最后一个等式的两端让 $t\downarrow 0$ 可知，$x\in\triangle$. 而 $\Omega|_\triangle$ 在 $\triangle$ 中稠定，因此 $\triangle=\overline{D(\Omega)}=\overline{D(\Omega|_\triangle)}$. 再结合文献[3]，$\overline{D(\Omega)}=\{x\in l_\infty;\lim_{t\downarrow 0}\|P(t)x-x\|_\infty=0\}=\{x\in l_\infty;G(t)x$ 关于 t $(\geqslant 0)$ 连续可微$\}$. 也就是说，转移概率函数成为一强连续半群的最大子空间是 Markov 积分半群生成元的闭包 $\overline{D(\Omega)}$.

注 2　从推论 1 知，q- 矩阵 Q，Markov 积分半群的生成元 Ω 及转移概率函数 $P(t)$ 之间的关系如下

$$q_{ij}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\Omega\left[\frac{1}{t}\int_0^t p_{ij}(s)\mathrm{d}s\right]$$

推论 3　设 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 是转移概率函数，Ω 是对应的 Markov 积分半群 $G(t)$ 的生成元. 则 Ω 在 l_∞ 空间里弱* 稠定.

证　对于任意的 $x\in l_\infty$ 及 $t>0$，令 $x_t=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)x\mathrm{d}s$，则由推论 1 知，$x_t\in D(\Omega)$. 又对于每一个 $y\in l_1$，$yP(t)$ 是 l_1 上关于 $t\geqslant 0$ 的连续函数，于是当 t 从 0 的右端趋于 0 时

$$\langle x_t,y\rangle=\langle\frac{1}{t}\int_0^t P(s)x\mathrm{d}s,y\rangle=\langle x,\frac{1}{t}\int_0^t yP(s)\mathrm{d}s\rangle\to\langle x,y\rangle$$

即 x_t 弱* 收敛到 x. 故 Ω 在 l_∞ 空间里是弱* 稠定的. 证毕.

定理2 设 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 是一转移概率函数，Ω 是其对应的 Markov 积分半群 $G(t)$ 的生成元. 则 $D(\Omega)=\{x\in l_\infty;\ \omega^*-\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{P(h)x-x}{h}$ 存在$\}$，并且 $\Omega x=\omega^*-\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{P(h)x-x}{h}$.

证 设 l_1 上的强连续半群 $P(t)$ 的生成元为 A，则由文献[2]的定理5.1知 $A^*=\Omega$. 令

$$\Sigma=\{x\in l_\infty;\ \omega^*-\lim_{h\downarrow 0}\frac{P(h)x-x}{h}\ \text{存在}\}$$

任取 $x\in D(\Omega)$，则对每一个 $y\in l_1$，根据(4)式，当 h 从0的右端趋于0时

$$\langle\frac{P(h)x-x}{h},\ y\rangle=\langle\frac{1}{h}\int_0^h P(s)\Omega x\mathrm{d}s,\ y\rangle=\langle\Omega x,\ \frac{1}{h}\int_0^h yP(s)\mathrm{d}s\rangle\to\langle\Omega x,\ y\rangle$$

于是 $x\in\Sigma$，且 $\Omega x=\omega^*-\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{P(h)x-x}{h}$. 反过来，如果 $x\in\Sigma$，令 $z=\omega^*-\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{P(h)x-x}{h}$，则对每一个 $y\in D(A)$，有

$$\langle x,\ Ay\rangle=\lim_{h\downarrow 0}\langle x,\ \frac{yP(h)-y}{h}\rangle=\lim_{h\downarrow 0}\langle\frac{P(h)x-x}{h},\ y\rangle=\langle z,\ y\rangle$$

因此 $x\in D(A^*)=D(\Omega)$，且 $A^*x=\Omega x=\omega^*-\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{P(h)x-x}{h}=z$.

定理3 设 $\gamma=\{x\in l_\infty;\ \|P(t)x-x\|_\infty=O(t),\ t\in[0,\delta],\ \delta>0\}$，其中 $O(t)$ 表示满足 $|k|\leqslant Mt$ ($M>0$ 是常数) 的量 k，则

$$\gamma=\{x\in l_\infty;\ \text{存在}\ M'>0\ \text{及}\ x_n\in D(\Omega),\ \text{使得}\ \|\Omega x_n\|_\infty\leqslant M'\ \text{及}\ x_n\xrightarrow{\omega^*}x\}$$

且 $\gamma=D(\Omega)$.

证 对每一个 $x\in\gamma$，设 $x_n=n\int_0^{1/n}P(s)x\mathrm{d}s$，则由推论1和3知，$x_n\in D(\Omega)$ 及 $x_n\xrightarrow{\omega^*}x$ ($n\to\infty$). 同时，结合(4)式知，当 n 充分大时

$$\|\Omega x_n\|_\infty=\|\Omega n\int_0^{1/n}P(s)x\mathrm{d}s\|_\infty=\|n\left[P\left(\frac{1}{n}\right)x-x\right]\|_\infty=O(1)$$

反过来，因为 $\|\Omega x_n\|_\infty\leqslant M'$ 及 $x_n\xrightarrow{\omega^*}x$，所以

$$\begin{aligned}\|P(t)x-x\|_\infty&=\sup\{|\langle P(t)x-x,\ y\rangle|;\ \|y\|_1\leqslant 1,\ y\in l_1\}\\&=\sup\{|\lim_{t\downarrow 0}\langle P(t)x_n-x_n,\ y\rangle|;\ \|y\|_1\leqslant 1,\ y\in l_1\}\\&\leqslant\lim_{t\downarrow 0}\sup\{|\langle P(t)x_n-x_n,\ y\rangle|;\ \|y\|_1\leqslant 1,\ y\in l_1\}\\&=\lim_{t\downarrow 0}\sup\{|\langle\int_0^t P(s)\Omega x_n\mathrm{d}s,\ y\rangle|;\ \|y\|_1\leqslant 1,\ y\in l_1\}\\&\leqslant M't=O(t)\end{aligned}$$

从而第一等式得证. 若 $x\in D(\Omega)$，运用(4)式，得

$$\|P(s)x-x\|_\infty=\|\int_0^t P(s)\Omega x\mathrm{d}s\|_\infty\leqslant\int_0^t\|P(s)\|_\infty\quad\|\Omega x\|_\infty\mathrm{d}s\leqslant Mt$$

其中 $M=\|\Omega x\|_\infty$，于是 $\|P(s)x-x\|_\infty=O(t)$，所以 $x\in\gamma$. 反过来，对每一个 $y\in D(A)\subset l_1$，这里 A 是 l_1 上的强连续半群 $P(t)$ 的生成元，则

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0}\langle\frac{P(t)x-x}{t},\ y\rangle&=\lim_{t\downarrow 0}\langle x,\ \frac{P(t)y-y}{t}\rangle=\lim_{t\downarrow 0}\langle x,\ \frac{1}{t}\int_0^t yAP(s)\mathrm{d}s\rangle\\&=\langle\Omega x,\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t yP(s)\mathrm{d}s\rangle=\langle\Omega x,\ y\rangle\end{aligned}$$

又当 t 很小时，$\|\dfrac{P(t)x-x}{t}\|_\infty\leqslant M$，而 $D(A)$ 是 l_1 的稠密子空间，故对每一个 $y\in l_1$，均有

$$\lim_{t\downarrow 0}\langle\frac{P(t)x-x}{t},\ y\rangle=\langle\Omega x,\ y\rangle$$

于是由定理2知，$x\in D(\Omega)$. 证毕.

定理4 设 Q 是 q-矩阵，$P(t)$ 是 Q-函数. 如果 $e_j\in D(\Omega)$，则 $Q=(q_{ij})$ 的每一列有界，即 $|q_{ij}|\leqslant M_j$，且 $P(t)$ 满足关于 Q 的前项微分方程组. 反过来，如果 $Q=(q_{ij})$ 的每一列有界，且 $P(t)$ 满足关于 Q 的

前项微分方程组，则 $e_j \in D(\Omega)$.

证　如果 $e_j \in D(\Omega)$，则由文献[4]的定理 2 知

$$\langle P'(t)e_j, e_i\rangle = \langle P(t)\Omega e_j, e_i\rangle \quad \forall t \geqslant 0 \tag{5}$$

令 $t = 0$，得

$$q_{ij} = \langle P(0)\Omega e_j, e_i\rangle = \langle \Omega e_j, e_i\rangle$$

于是，对固定的 $j \in E$，有

$$|q_{ij}| = |\langle \Omega e_j, e_i\rangle| \leqslant \|\Omega e_j\|_\infty \|e_i\|_1 = \|\Omega e_j\|_\infty$$

因此，$Q = (q_{ij})$ 的每一列有界，且 $(\Omega e_j)_i = (q_{ij})_i$，将其代入(5)得前向微分方程组成立.

另一方面，因为 $Q = (q_{ij})$ 列有界，从而 $(q_{kj})_k \in l_\infty$，又前项微分方程组成立，即

$$p'_{ij}(t) = \sum_{l\in E} p_{il}(t)q_{lj} \qquad i,j \in E,\ t \geqslant 0$$

于是

$$te_j + \int_0^t G(s)(q_{kj})_k \mathrm{d}s = te_j + \int_0^t\int_0^s P(\tau)(q_{kj})_k \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}s = \int_0^t (e_j + \int_0^s P'(\tau)e_j \mathrm{d}\tau)\ \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t (e_j + P(s)e_j - e_j)\mathrm{d}s = G(t)e_j$$

因此，根据积分半群生成元的定义知，$e_j \in D(\Omega)$，且 $\Omega e_j = (q_{kj})_k$.

参考文献：

[1]　Anderson W J. Continuous-time Markov Chains [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[2]　Li Yang-rong. Contraction Integrated Semigroups and Their Applications to Continuous-time Markov Chains [J]. Acta Math Sinica, 2003, 19(3): 605－618.

[3]　Zhao Wen-qiang, Li Yang-rong. Restriction of Markov Integrated Semigroups and Generation of Increasing Integrated semigroups [J]. Acta Anal Funct Appl, 2005, 25(2): 137－145.

[4]　赵文强，商彦英. Markov 积分半群的非退化性及弱* 可微性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2006, 31(6): 24－27.

[5]　Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[6]　Li Jia, Li Yang-rong. Ω*-Generator of the Adjiont Semigroups of Linear Operators [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2004, 29(5): 723－728.

Generator of Markov Integrated Semigroup

ZHAO Wen-qiang[1], LI Jia[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the properties between transition function and generator of Markov integrated semiroup are discussed. Some equivalent characterizations of the generator of Markov integrated semiroup are presented. Furthermore, the condition in order that the Kolmogorov forward equations hold is also studied.

Key words: transition function; Markov integrated semigroup; generator; forward equations

责任编辑　覃吉康