第 32 卷　第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2007 年 10 月
Vol. 32　No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science)　　Oct.　2007

文章编号：1000－5471(2007)05－0010－04

弱 FC-KKM 映射与聚合不动点定理①

郑　莲

长江师范学院 数学系，重庆 涪陵 408000

摘要：在 FC-空间中引入和研究了弱 FC-KKM 映射和具有弱 FC-KKM 性质的映射类. 并在非紧局部 FC-空间中对具有弱 FC-KKM 性质的映射建立了一些新的不动点定理和聚合不动点定理. 作为应用，给出了聚合不动点定理在矢量平衡问题组中的应用.

关　键　词：局部 FC-空间；弱 FC-KKM 映射；弱 FC-KKM 性质；聚合不动点定理；矢量平衡问题组

中图分类号：O177.91　　**文献标识码：A**

最近，文献[1]引入了不具任何线性结构和凸性结构的(局部)有限连续拓扑空间，简称(局部)FC-空间. 本文首先在 FC-空间中引入弱 FC-KKM 映射和弱 FC-KKM(X,Y)映射类. 然后在局部 FC-空间中证明一类涉及弱 FC-KKM(X,Y)映射类的不动点定理和聚合不动点定理. 作为应用，给出了聚合不动点定理在矢量平衡问题组中的应用. 这些定理将近期文献中许多相关结果推广到了一般的拓扑空间中.

定义 1　设$(X,\{\varphi_N\})$是 FC-空间，Y是拓扑空间，$S,T: X \longrightarrow 2^Y$是集值映射.

(i) 称S是关于T的弱 FC-KKM 映射(简称 W-FC-KKM 映射)，若对每一$A=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$和$x \in \varphi_A(\Delta_n)$，都有$T(x) \cap S(A) \neq \emptyset$.

(ii) 称T有 W-FC-KKM 性质，若对任意关于T的 W-FC-KKM 映射S，集簇$\{\mathrm{cl}S(x): x \in X\}$有有限交性质. 记 W-FC-KKM$(X,Y)=\{T \mid T: X \longrightarrow 2^Y$ 有 W-FC-KKM 性质$\}$.

显然，W-FC-KKM 映射包含文献[1－4]中的 KKM 映射作为特例.

整篇文章，假设所有的拓扑空间都是 Hausdorff 的.

1　不动点定理和聚合不动点定理

在这一部分，我们首先证明一个涉及映射类 W-FC-KKM(X,X)的几乎不动点定理.

定理 1　设$(E,\{\varphi_N\},\mathscr{U})$是局部 FC-空间，$X$是$E$的紧的 FC-子空间. 若$T \in$ W-FC-KKM(X,X)，则对每一开域$U \in \mathscr{U}$，存在$x_u \in X$，使得$Tx_u \cap U(x_u) \neq \emptyset$.

证　假设结论不成立，则对每一$x \in X$，$Tx \cap U(x)=\emptyset$. 不妨设β是一致结构$\mathscr{U}$的对称开域的基，则存在$V \in \beta$，使得$V \subset U$. 定义$F: X \longrightarrow 2^X$为$Fx = X \backslash V(x)$，$x \in X$，则Fx是X中的非空闭集. 现证F是关于T的 W-FC-KKM 映射. 事实上，假设不成立，则存在$A=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$和$u \in \varphi_A(\Delta_n)$，使得$T(u) \cap F(A)=\emptyset$，从而对任意$v \in T(u)$，都有$v \notin Fx$，$x \in A$. 由$F$的定义有$v \in V(x)$，$x \in A$，由$V \in \mathscr{U}$是对称的和$(E,\varphi_N,\mathscr{U})$是局部 FC-空间知，$A \subset V(v)$和$u \in \varphi_A(\Delta_n) \subset V(v)$. 由$V$的对称性有$v \in V(u)$，于是$v \in V(u) \cap Tu \subset U(u) \cap Tu$，这与$Tx \cap U(x)=\emptyset\ (x \in X)$矛盾，故$F$是关于$T$的 W-FC-KKM 映射. 又因为$T \in$ W-FC-KKM(X,X)，所以$\{Fx: x \in X\}$有有限交性质，由X是紧的，所以$\bigcap_{x \in X} Fx \neq \emptyset$，取$t \in \bigcap_{x \in X} Fx$，则一定有$t \in Ft$，这与$F$的定义矛盾，故结论成立.

---

①　收稿日期：2006－12－14

基金项目：长江师范学院资助项目

作者简介：郑　莲(1974－)，女，重庆涪陵人，硕士，讲师，主要从事非线性泛函分析的研究.

定理 2　设$(E,\{\varphi_N\},\mathscr{U})$是局部 FC- 空间，$X$ 是 E 的紧的 FC- 子空间．若 $T\in$ W-FC-KKM(X,X)是闭的映射，则 T 在 X 中有不动点．

证　不妨设 β 是一致结构 $\mathscr{U}$ 的对称开域的基．由定理 1，对每一 $V\in\beta$，存在 $x_V\in X$，使得 $Tx_V\cap V(x_V)\neq\varnothing$．设 $Q_V=\{x\in X:Tx\cap \mathrm{cl}V(x)\neq\varnothing, V\in\beta\}$．则 $Q_V\neq\varnothing$．下面证明 Q_V 是 X 中的闭集．设 $\{x_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 Q_V 中的任一网，且 $x_\alpha\longrightarrow x\in X$，则对每一 $\alpha\in I$，存在 $y_\alpha\in Tx_\alpha$，使得$(x_\alpha,y_\alpha)\in\mathrm{cl}V$，由于 $TX\subset X$，X 是紧的，可设 $y_\alpha\longrightarrow y\in X$．因为 T 是闭的，所以 $y\in Tx$．由于$(x,y)\in\mathrm{cl}V$，所以 $y\in Tx\cap\mathrm{cl}V(x)$，即 $x\in Q_V$，从而 Q_V 是 E 中的闭集．由于对 β 的任意有限个元 $V_1,V_2,\cdots,V_n$，存在 $V_0\in\beta$，使得 $V_0\subset\bigcap_{i=1}^{n}V_i$，因此$\{Q_V:V\in\beta\}$有有限交性质．再由 X 的紧性知，$\bigcap_{V\in\beta}Q_V\neq\varnothing$，取 $\bar{x}\in\bigcap_{V\in\beta}Q_V$，则 $T\bar{x}\cap\mathrm{cl}V(\bar{x})\neq\varnothing$，$V\in\beta$．因此，存在 $\bar{y}\in T\bar{x}$ 且 $\bar{y}\in\mathrm{cl}V(\bar{x})$，由于 $\mathrm{cl}V$ 是对称的，所以 $\bar{x}\in\mathrm{cl}V(\bar{y})$，即 $\bar{x}\in\mathrm{cl}V(T\bar{x})$，$V\in\beta$．由于 $\mathscr{U}$ 的所有闭的对称域形成一个基，且 T 是闭的，故由文献[5]的引理 1，$\bar{x}\in T\bar{x}$，即 $\bar{x}$ 是 T 的不动点．

注 1　从上述两个定理的证明过程易知：(a) 若在定理 1 中将 X 的紧性去掉，同时将 T 的条件加强为紧映射，结论仍然成立，因此，定理 1 也将文献[6]的引理 1 从拓扑矢量空间中的凸子集推广到了无任何线性结构和凸性结构的拓扑空间中．(b) 若将定理 2 中的条件"T 是闭的"改为"T 是上半连续有闭值的映射"，结论仍然成立．

注 2　定理 1 和 2 分别将文献[7]中的定理 3.1 和 3.2 从局部 L- 凸空间推广到局部 FC- 空间，将 KKM 映射类削弱为 W-FC-KKM 映射类．

文献[1]的引理 3.1 证明了局部凸拓扑矢量空间中任意几乎凸子集都是局部 FC- 空间，故由定理 2 易得

推论 1　设 X 是局部凸拓扑矢量空间 E 的非空紧几乎凸子集，$T\in$ W-FC-KKM(X,X)是闭的集值映射，则 T 在 X 中有不动点．

引理 1　设 X,Y 为拓扑空间，I 为指标集，对每一 $\alpha\in I$，$G_\alpha:X\longrightarrow 2^{Y_\alpha}$ 是闭的集值映射，令 $Y=\prod_{\alpha\in I}Y_\alpha$，则 $G=\prod_{\alpha\in I}G_\alpha:X\longrightarrow 2^Y$ 是闭的集值映射．

证　设 π_α 为 Y 到 Y_α 的投影算子，$\{(x^\beta,y^\beta)\}$为$\{(x,y)\in X\times Y:y\in G(x)\}$中的任意一个网且$\{(x^\beta,y^\beta)\}$收敛于$\{(x^0,y^0)\}\subset X\times Y$，则 $y^\beta\in G(x^\beta)=\prod_{\alpha\in I}G_\alpha(x^\beta)$，$y^\beta_\alpha=\pi_\alpha(y^\beta)\in G_\alpha(x^\beta)$，由于 G_α 是闭的，所以 $y^0_\alpha=\pi_\alpha(y^0)\in G_\alpha(x^0)$，从而 $y^0=\prod_{\alpha\in I}y^0_\alpha\in\prod_{\alpha\in I}G_\alpha(y^0)=G(y^0)$．故 G 是闭的集值映射．

引理 2　设 I 是任意指标集，(X,φ_N)是 FC- 空间，$\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间簇，对每一 $\alpha\in I$，$F_\alpha\in$ W-FC-KKM(X,Y_α)，令 $Y=\prod_{\alpha\in I}Y_\alpha$，$F=\prod_{\alpha\in I}F_\alpha$．则 $F\in$ W-FC-KKM(X,Y)．

证　设 $G:X\longrightarrow 2^Y$ 是任一关于 F 的 W-FC-KKM 映射，则对每一个 $A=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$ 和 $x\in\varphi_A(\Delta_n)$，都有 $F(x)\cap G(A)\neq\varnothing$．不失一般性，可设 $F(x)=\prod_{\alpha\in I}F_\alpha(x)$，$G(A)=\prod_{\alpha\in I}G_\alpha(A)$，且对每一 $\alpha\in I$，$F_\alpha(x)\cap G_\alpha(A)\neq\varnothing$．由于 $F_\alpha\in$ W-FC-KKM(X,Y_α)，所以$\{\mathrm{cl}G_\alpha(x):x\in X\}$有有限交性质．又

$$\bigcap_{x\in X}\mathrm{cl}G(x)=\bigcap_{x\in X}\prod_{\alpha\in I}\mathrm{cl}G_\alpha(x)=\prod_{\alpha\in I}\bigcap_{x\in X}\mathrm{cl}G_\alpha(x)$$

故$\{\mathrm{cl}G(x):x\in X\}$有有限交性质，从而 $F\in$ W-FC-KKM(X,Y)，结论成立．

定理 3　设 I 是任意指标集，$(E_\alpha,\{\varphi_{N_\alpha}\},\mathscr{U}_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是一簇局部 FC- 空间．对每一 $\alpha\in I$，设 X_α 是 E_α 的紧的 FC- 子空间，β_α 是 $\mathscr{U}_\alpha$ 的对称域的基，$G_\alpha\in$ W-FC-KKM$(\prod_{\alpha\in I}X_\alpha,X_\alpha)$是闭的映射．则存在一点 $\bar{x}=(\bar{x}_\alpha)_{\alpha\in I}\in X$，使得 $\bar{x}_\alpha\in G_\alpha(\bar{x})$，$\alpha\in I$．

证　设 $E=\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$，$X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$，对每一 $\alpha\in I$，$V_\alpha\in\beta_\alpha$，定义

$$V_{\prod_{\alpha\in I}v_\alpha}=\{(x,y)\in E\times E:(x_\alpha,y_\alpha)\in V_\alpha,\alpha\in I\}$$

则 $\mathscr{V}=\{V_{\prod_{\alpha\in I}v_\alpha}:V_\alpha\in\beta_\alpha,\alpha\in I\}$ 是乘积一致结构对称域的基，在 E 上赋予一致拓扑．对每一 $\alpha\in I$，设 $\pi_\alpha:E\longrightarrow E_\alpha$ 是 E 到 E_α 上的投影，对每一 $N=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle E\rangle$，设 $N_\alpha=\pi_\alpha(N)=\{\pi_\alpha(x_0),\pi_\alpha(x_1),\cdots,\pi_\alpha(x_n)\}\in\langle E_\alpha\rangle$，因为 E_α 是 FC- 空间，所以存在连续映射 $\varphi_{N_\alpha}:\Delta_n\longrightarrow E_\alpha$．定义 $\varphi_N:\Delta_n\longrightarrow X$ 为

$$\varphi_N(t) = \prod_{\alpha\in I}\varphi_{N_\alpha}(t) \qquad t \in \Delta_n$$

则 φ_N 是连续的，故$(E, \{\varphi_N\})$是 FC- 空间且 $\mathscr{V}$ 是 E 的一致结构对称域的基.

对每一 $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in E$ 和每一 $V \in \mathscr{V}$，有

$$V(x) = \{y \in E:(x, y) \in V\} = \{y \in E: y_\alpha \in V_\alpha(x_\alpha), \alpha \in I\} = \prod_{\alpha\in I} V_\alpha(x_\alpha)$$

对每一 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle E\rangle$ 和 $\{y_{i_0}, y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N \cap V(x)$，有 $\pi_\alpha(N) \in \langle E_\alpha\rangle$ 和

$$\{\pi_\alpha(y_{i_o}), \pi_\alpha(y_{i_1}), \cdots, \pi_\alpha(y_{i_k})\} \subset \pi_\alpha(N \cap V(x)) \subset N_\alpha \cap V_\alpha(x_\alpha)$$

由于 $V_\alpha(x_\alpha)$ 是$(E_\alpha, \{\varphi_{N_\alpha}\}, \mathscr{U}_\alpha)$ 的 FC- 子空间，故 $\varphi_{N_\alpha}(\Delta_K) \subset V_\alpha(x_\alpha)$，即

$$\varphi_N(\Delta_K) = \prod_{\alpha\in I}\varphi_{N_\alpha}(\Delta_K) \subset \prod_{\alpha\in I} V_\alpha(x_\alpha) = V(x)$$

即 $V(x)$ 是$(E, \{\varphi_N\}, \mathscr{U})$ 的 FC- 子空间. 故$(E, \{\varphi_N\}, \mathscr{U})$ 是局部 FC- 空间. 同理可证 X 是$(E, \{\varphi_N\}, \mathscr{U})$ 的紧的 FC- 子空间. 定义 $G: X \longrightarrow 2^X$ 为 $G(x) = \prod_{\alpha\in I} G_\alpha(x)$，$x \in X$，由于对每一 $\alpha \in I$，$G_\alpha: X \longrightarrow 2^{X_\alpha}$ 是闭的映射，由引理 1，G 是闭的，又由引理 2，$G \in$ W-FC-KKM(X, X)，于是由定理 2，G 在 X 中存在不动点，即存在 $\bar{x} \in X$，使得 $\bar{x} \in G(\bar{x})$，即 $\bar{x}_\alpha \in G_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

注 3 由定理 3 证明过程易知(a) 若将条件“对每一 $\alpha \in I$，G_α 是闭的集值映射”改为“G_α 是上半连续紧值映射或上半连续有闭值的映射”，结论仍然成立；(b) 若将 X_α 的紧性去掉，将 G_α 的条件加强为紧映射，结论仍然成立.

2 矢量平衡问题组

在这一部分主要运用聚合不动点定理证明矢量平衡问题组的存在定理.

定理 4 设 I 是任意指标集，$(E_\alpha, \{\varphi_{N_\alpha}\}, \mathscr{U}_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是一簇局部 FC- 空间. 对每一 $\alpha \in I$，设 X_α 是 E_α 的紧的 FC- 子空间，β_α 是 $\mathscr{U}_\alpha$ 的对称域的基，Z_α 是实拓扑矢量空间，D_α 是 Z_α 中内部非空的闭点凸锥且 $D_\alpha \neq Z_\alpha$.

令 $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. 对每一 $\alpha \in I$，设 $F_\alpha: X \times X_\alpha \longrightarrow 2^{Z_\alpha}$ 和 $S_\alpha: X \longrightarrow 2^{X_\alpha}$ 是有非空闭值的连续映射，定义 $G_\alpha: X \longrightarrow 2^{X_\alpha}$ 为

$$G_\alpha(x) = \{u_\alpha \in S_\alpha(x): F_\alpha(x, u_\alpha) \cap \operatorname*{wmin}_{D_\alpha} F_\alpha(x, S_\alpha(x)) \neq \varnothing, x \in X\}$$

且 $G_\alpha \in$ W-FC-KKM(X, X_α). 则存在 $\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$，$\bar{z}_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)$，使得 $z_\alpha - \bar{z}_\alpha \notin -\operatorname{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

特别地，若对每一 $\alpha \in I$，$x \in X$，$x_\alpha = \pi_\alpha(x) \in X_\alpha$，有 $F_\alpha(x, x_\alpha) \subset D_\alpha$，则 $z_\alpha \notin -\operatorname{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

证 因为对每一 $\alpha \in I$，X_α 是紧的，而紧性具有可积性，所以 X 和 $X \times X_\alpha$ 是紧的. 又因为 F_α,S_α 是连续映射，所以 $F_\alpha(X \times X_\alpha)$ 和 $S_\alpha(X)$ 是紧的，从而 F_α 和 S_α 是紧连续映射. 又因为 F_α,S_α 是有闭值的映射，由文献[8] 的定理 4，G_α 是闭且紧的上半连续映射，从而 G_α 是有紧值的上半连续映射. 由假设 $G_\alpha \in$ W-FC-KKM(X, X_α)，$\alpha \in I$，故由定理 3 的注，存在 $\bar{x} \in X$，使得 $\bar{x}_\alpha \in G_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$. 即存在 $\bar{z}_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)$，$\bar{x}_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，使得 $z_\alpha - \bar{z}_\alpha \notin -\operatorname{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

特别地，若对每一 $\alpha \in I$，$x \in X$，$x_\alpha = \pi_\alpha(x) \in X_\alpha$，有 $F_\alpha(x, x_\alpha) \subset D_\alpha$，则 $z_\alpha \notin -\operatorname{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$. 否则，存在 $\alpha_0 \in I$，$\upsilon_{\alpha 0} \in S_{\alpha_0}(\bar{x})$，$\omega_{\alpha_0} \in F_{\alpha_0}(\bar{x}, V_{x_0})$，使得 $\omega_{\alpha_0} \in -\operatorname{int}D_{\alpha_0}$，则 $\omega_{\alpha_0} - \bar{z}_{\alpha_0} \in -\operatorname{int}D_{\alpha_0} - D_{\alpha_0} \subset -\operatorname{int}D_{\alpha_0}$，矛盾. 故结论成立.

定理 5 设 I 是任意指标集，$(E_\alpha, \{\varphi_{N_\alpha}\}, \mathscr{U}_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是一簇局部 FC- 空间，$\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一簇拓扑空间. 对每一 $\alpha \in I$，设 X_α 是 E_α 的紧的 FC- 子空间，β_α 是 $\mathscr{U}_\alpha$ 的对称域的基，Z_α 是实拓扑矢量空间，D_α 是 Z_α 中内部非空的闭点凸锥且 $D_\alpha \neq Z_\alpha$. 令 $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$，$Y = \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$. 对每一 $\alpha \in I$，设 $F_\alpha: X \times Y_\alpha \times X_\alpha \longrightarrow 2^{Z_\alpha}$ 和 $S_\alpha: X \longrightarrow 2^{X_\alpha}$ 是有非空闭值的连续映射，$f_\alpha: X \longrightarrow Y_\alpha$ 是连续映射. 定义 $H_\alpha: X \longrightarrow 2^{X_n}$ 为

$$H_\alpha(x) = \{u_\alpha \in S_\alpha(x): F_\alpha(x, f_\alpha(x), u_\alpha) \cap \operatorname*{wmin}_{D_\alpha} F_\alpha(x, f_\alpha(x), S_\alpha(x)) \neq \varnothing, x \in X\}$$

假设 $H_\alpha \in$ W-FC-KKM(X, X_α). 则存在$(\bar{x}, \bar{y}) = \prod_{\alpha\in I}(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha) \in X \times Y$，$\bar{x}_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\bar{y}_\alpha = f_\alpha(\bar{x})$，$\bar{z}_\alpha \in$

$F_\alpha(\bar{x}, \bar{y}_\alpha, \bar{x}_\alpha)$，使得 $z_\alpha - \bar{z}_\alpha \notin -\mathrm{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, \bar{y}_\alpha, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

特别地，若对每一 $\alpha \in I$，有 $F_\alpha(x, y_\alpha, u_\alpha) \subset D_\alpha$，$\forall (x, y_\alpha, u_\alpha) \in X \times Y_\alpha \times X_\alpha$，则 $z_\alpha \notin -\mathrm{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, \bar{y}_\alpha, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

证　定义 $G_\alpha: X \times X_\alpha \longrightarrow 2^{Z_\alpha}$ 为

$$G_\alpha(x, u_\alpha) = F_\alpha(x, f_\alpha(x), u_\alpha) \qquad (x, u_\alpha) \in X \times X_\alpha$$

则 $H_\alpha(x) = \{u_\alpha \in S_\alpha(x): G_\alpha(x, u_\alpha) \cap \operatorname*{wmin}_{D_\alpha} G_\alpha(x, S_\alpha(x)) \neq \emptyset\}$. 由假设 $G_\alpha: X \times X_\alpha \longrightarrow 2^{Z_\alpha}$ 是有非空紧值的连续映射，则由假设和文献[8]的定理4，H_α 是闭且紧的上半连续映射，故由定理3，存在 $\bar{x} \in X$，$\bar{x}_\alpha \in X$，$\bar{x}_\alpha \in H_\alpha(\bar{x})$，即存在 $\bar{z}_\alpha \in G(\bar{x}, \bar{x}_\alpha) = F_\alpha(\bar{x}, f_\alpha(\bar{x}), \bar{x}_\alpha)$，使得 $z_\alpha - \bar{z}_\alpha \notin -\mathrm{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, f_\alpha(\bar{x}), u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$，$\alpha \in I$.

另外，若对每一 $\alpha \in I$，有 $F_\alpha(x, y_\alpha, u_\alpha) \subset D_\alpha$，$\forall (x, y_\alpha, u_\alpha) \in X \times Y_\alpha \times X_\alpha$，则 $z_\alpha \notin -\mathrm{int}D_\alpha$，$z_\alpha \in F_\alpha(\bar{x}, \bar{y}_\alpha, u_\alpha)$，$u_\alpha \in S_\alpha(\bar{x})$. 若不然，则存在 $\alpha_0 \in I$，$\upsilon_{\alpha_0} \in S_{\alpha_0}(\bar{x})$，$\omega_{\alpha_0} \in F_{\alpha_0}(\bar{x}, \bar{y}_{\alpha_0}, \upsilon_{\alpha_0})$，使得 $\omega_{\alpha_0} \in -\mathrm{int}D_{\alpha_0}$，由于 $\bar{z}_{\alpha_0} \in D_{\alpha_0}$，所以 $\omega_{\alpha_0} - \bar{z}_{\alpha_0} \in -\mathrm{int}D_{\alpha_0} - D_{\alpha_0} \subset -\mathrm{int}D_{\alpha_0}$，矛盾. 故结论成立.

注　定理 4 和 5 将文献[8]中的矢量平衡问题推广到矢量平衡问题组.

参考文献：

[1] Ding X P. Generalizations of Himmelberg type fixed point theorems in locally FC-spaces [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2006，29(1)：1－6.

[2] Lin L J，Ko C J and Park S，Coincidence theorems for set-valued mappings with G-KKM property on generalized convex space [J]. Discuss Math Differential Incl.，1998，18：69－85.

[3] Balaj M，Weakly G-KKM mappings，G-KKM property and minimax inequalities [J]. J Math Anal Appl，2004，294：237－245.

[4] Park S. Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications [J]. J Math Anal Appl，1989，141：164－176.

[5] Wu X，Li A. Approximate selection theorems in H-spaces with applications [J]. J Math Anal Appl，1999，231：118－132.

[6] Chang T H，Yen C L，KKM property and fixed point theorems [J]. J Math Anal Appl，1996，203：224－235.

[7] Ding X P. Abstract and generalizations of Himmelberg type fixed-point theorems [J]. Computers Math Applic，2001，41：497－504.

[8] Lin L J，Yu Z T. On some equilibrium problems for multimaps [J]. J Comput Appl Math，2001，129：171－183.

Weakly FC-KKM Mappings and Collectively Fixed Point Theorems

ZHENG　Lian

Dept. of Mathematics，Yangtze Normal College，Fuling Chongqing 408000，China

Abstract：The weakly FC-KKM mappings and the class of mappings with the weakly FC-KKM property are introduced and studied in FC-space. Some new fixed point theorems and collectively fixed point theorems involving the mapping with the weakly FC-KKM property is established in noncompact locally FC-spaces. By using the collectively fixed point theorem，the existence theorems of some new system of vector equilibrium problems are obtained.

Key words：locally FC-spaces；weakly FC-KKM mappings；weakly FC-KKM property；collectively fixed-point theorems；system of vector equilibrium problems

责任编辑　覃吉康