第 32 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2007 年 8 月
Vol. 32 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science) Aug. 2007

文章编号：1000-5471(2007)04-0022-03

联系函数生成元与随机变量相依的几个关系[①]

易文德

重庆文理学院 数学与计算机科学系，重庆 永川 402160

摘要：应用阿基米德联系函数探讨随机变量的相依性和独立性，分析了相依和独立随机变量的阿基米德联系函数生成元的形式，提出了随机变量完全正(负)相依和相对正(负)相依的概念，并讨论了正(负)相依时阿基米德联系函数生成元所应满足的条件.

关 键 词：阿基米德联系函数；生成元；相依；独立

中图分类号：O212 **文献标识码**：A

众所周知，随机变量相互独立只是一种理想状态，刻划随机变量相依机制对可靠性理论、生存分析、保险、金融等领域是非常重要的. 联系函数(Copula)[1]的概念及其理论的完善对相依机制的研究提出了新方向. 联系函数这个概念产生于概率度量空间理论的发展过程中[2,3]，它在统计学中的重要地位是由 Sklar 定理确定的. 阿基米德联系函数是一类特殊的联系函数，它的形式简单，具有许多优良性质. 相互独立是相依的特殊情况，文章基于联系函数的知识，应用阿基米德联系函数讨论随机变量的相依性和独立性，分析随机变量正(负)相依时阿基米德联系函数生成元所满足的条件.

定义 设连续随机变量 X，Y 的联系函数为 C. 如果对任意的 x，$y \geqslant 0$，有 $\prod < C$($\prod > C$)，称连续随机变量 X，Y 是完全正(负)相依. 如果对 x，$y \geqslant 0$，有 $\tau_C > 0$($\tau_C < 0$)，称连续随机变量 X，Y 是相对正(负)相依.

显然，完全正(负)相依的随机变量一定是相对正(负)相依的，但相对正(负)相依的随机变量不一定是完全正(负)相依的.

生成元为 $\varphi(t)$ 的阿基米德联系函数 $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$：

(i) 当 $\varphi(t) = 1 - t$ 时，$C(u, v) = W(u, v)$；

(ii) 当 $\varphi(t) = -\alpha \ln t$ 时，$C(u, v) = \prod(u, v)$，其中 $\alpha > 0$.

引理 1[1] 设阿基米德联系函数簇 $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ 的生成元 φ_θ 在 Ω 中可导. 那么 $C = \lim C_\theta$ 是阿基米德联系函数的充要条件是：在 Ω 中存在函数 φ 为 C 的生成元，对任意的 s，$t \in (0, 1)$，关于 θ 在 Θ 中的极限 $\lim \dfrac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)}$ 存在，且 $\lim \dfrac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi'_\theta(t)}$.

定理 1 设 φ_θ 是阿基米德联系函数簇 $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ 的生成元，且可导.

(i) 如果 $\lim \dfrac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = s - 1$，那么 $\lim C_\theta = W(u, v)$；

(ii) 如果 $\lim \dfrac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = t \ln s$，那么 $\lim C_\theta = uv$；

(iii) 如果 $\lim \dfrac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = 0$，那么 $\lim C_\theta = M(u, v)$.

---

① 收稿日期：2006-04-24

作者简介：易文德(1965-)，男，江西宜春人，讲师，主要从事概率统计的研究.

此处极限为关于 θ 在 Θ 中的极限.

证明：由引理 1 和阿基米德联系函数 $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ 的定义可证.

例 1　设 $\varphi_\theta(t) = -\ln\dfrac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$，$\theta \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，其中，则由 φ_θ 生成的关于随机变量 X_1，X_2 的阿基米德联系函数簇为 $C_\theta(F_1(t), F_2(t)) = -\dfrac{1}{\theta}\ln\left(1 + \dfrac{(e^{-\theta F_1(t)}-1)(e^{-\theta F_2(t)}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$.

因为 $\lim\limits_{\theta\to-\infty}\dfrac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = s-1$，因此 $C_{-\infty}(F_1(t), F_2(t)) = W(F_1(t), F_2(t))$. 由定理 1 可得 $C_0(F_1(t), F_2(t)) = F_1(t)F_2(t)$；$C_{+\infty}(F_1(t), F_2(t)) = M(F_1(t), F_2(t))$. 当 $\theta \in (-\infty, 0)$ 时，X_1，X_2 完全负相依；当 $\theta \in (0, +\infty)$ 时，X_1，X_2 完全正相依.

定义 5　对任意的 x，$y \in [0, +\infty)$，如果 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$，则称函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上是次可加的.

定理 2　设 C_1，C_2 分别是由 φ_1 和 φ_2 生成的阿基米德联系函数，那么 $C_1 \prec C_2$ 的充要条件是：$\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ 是次可加的.

证明：设 $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$，则 f 是连续不减函数，且 $f(0) = 0$.

必要性：若 $C_1 \prec C_2$，即对 $\forall\, u, v \in I$，有 $\varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \leqslant \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v))$. 令 $x = \varphi_2(u)$，$y = \varphi_2(v)$，则 $f(x) = \varphi_1(u)$，$f(y) = \varphi_1(v)$，代入前式得 $\varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y)) \leqslant \varphi_2^{[-1]}(x+y)$，用 φ_1 作用于等式两边得 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$. 因此 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ 是次可加的.

充分性：若 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ 是次可加的，即对任意的 x，$y \in [0, +\infty)$，有 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x+y) \leqslant \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(y)$，$\varphi_2^{[-1]}(x+y) \geqslant \varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y))$，令 $x = \varphi_2(u)$，$y = \varphi_2(v)$，则 $f(x) = \varphi_1(u)$，$f(y) = \varphi_1(v)$，代入前式得 $\varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \leqslant \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v))$，即 $C_1 \prec C_2$. 证毕.

定理 3　设 C 是由 φ 生成的阿基米德联系函数，那么

(i) $C \prec \prod$ 充要条件是：$\varphi(e^{-(x+y)}) \leqslant \varphi(e^{-x}) + \varphi(e^{-y})$；

(ii) $\prod \prec C$ 充要条件是：$\varphi^{[-1]}(x+y) \geqslant \varphi^{[-1]}(x) \cdot \varphi^{[-1]}(y)$.

其中 x，$y \in [0, +\infty)$.

证明：(i) 因为 $\prod$ 的生成元为 $\varphi_{\prod}(t) = -\ln t$，$t \in (0, 1]$，其反函数为 $\varphi_{\prod}^{-1}(x) = e^{-x}$，由定理 2 得 $\varphi \circ \varphi_{\prod}^{-1}(x+y) \leqslant \varphi \circ \varphi_{\prod}^{-1}(x) + \varphi \circ \varphi_{\prod}^{-1}(y)$，即 $\varphi(e^{-(x+y)}) \leqslant \varphi(e^{-x}) + \varphi(e^{-y})$.

(ii) 同理得 $\varphi_{\prod} \circ \varphi^{[-1]}(x+y) \leqslant \varphi_{\prod} \circ \varphi^{[-1]}(x) + \varphi_{\prod} \circ \varphi^{-1}(y)$，即

$\ln\varphi^{[-1]}(x+y) \geqslant \ln\varphi^{[-1]}(x) + \ln\varphi^{[-1]}(y)$. 结论得证.

定理 4　设函数 f 定义在 $[0, +\infty)$ 上. 如果 f 是凹函数且 $f(0) = 0$，那么 f 是次可加的.

设 C 是由 φ 生成的阿基米德联系函数. 显然，如果 $\varphi \circ e^{-x}$ 是凹函数，那么 $C \prec \prod$；如果 $\ln\varphi^{[-1]}(x)$ 是凹函数，那么 $\prod \prec C$.

定理 5　设 C 是由 φ 生成的阿基米德联系函数，如果 $\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}$ 是非增函数，那么 $C \prec \prod$.

证明：(i) 令 $g(t) = \dfrac{\varphi(e^{-t})}{t}$，则 $g(-\ln t) = \dfrac{\varphi(e^{\ln t})}{-\ln t} = \dfrac{\varphi(t)}{-\ln t}$，因为 $\varphi(t)$ 与 $-\ln t$ 都是非增函数，$g(-\ln t)$ 是增函数，可知 $g(t)$ 为非增函数，对 x，$y > 0$，因此有 $x[g(x+y) - g(x)] + y[g(x+y) - g(y)] \leqslant 0$，即 $(x+y)g(x+y) \leqslant xg(x) + yg(y)$，所以 $\varphi(e^{-(x+y)}) \leqslant \varphi(e^{-x}) + \varphi(e^{-y})$，由定理 3 得 $C \prec \prod$. 证毕.

定理 6　设 C 是由 φ 生成的阿基米德联系函数，且 φ 连续可导，如果 $t\varphi'(t)$ 是 $(0, 1)$ 上的减函数，那么 $C \prec \prod$.

证明：因为 φ 是 $(0, 1)$ 上的连续可导的减函数，$\varphi' < 0$，令 $g(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\ln t}$，$f(t) = t\varphi'(t)$，由题设 $f(t) = t\varphi'(t)$ 是减函数且连续，因此 $\lim\limits_{t\to1^-} t\varphi'(t)$ 存在. 又因为 $\lim\limits_{t\to1^-}\varphi(t) = 0 = \lim\limits_{t\to1^-}\ln t$，得 $\lim\limits_{t\to1^-}\dfrac{\varphi(t)}{\ln t} = \lim\limits_{t\to1^-}\dfrac{\varphi'(t)}{(\ln t)'} =$

$\lim\limits_{t\to1^-}t\varphi'(t)$，$g'(t)=\left(\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}\right)'=\left(t\varphi'(t)-\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}\right)\cdot\dfrac{1}{t\ln t}$，因为 $g(t)=\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}$ 是减函数，即 $g'(t)\leqslant 0$，由定理5知 $C\prec\prod$. 由于 $\dfrac{1}{t\ln t}<0$，因此只要证 $t\varphi'(t)-\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}\geqslant 0$. 反证，假设 $t\varphi'(t)-\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}<0$，因此存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $t\varphi'(t_0)-\dfrac{\varphi(t_0)}{\ln t_0}<0$，因此有 $\dfrac{\varphi(t_0)}{\ln t_0}>t_0\varphi'(t_0)>\lim\limits_{t\to1^-}t\varphi'(t)=\lim\limits_{t\to1^-}\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}$（由题设 $f(t)=t\varphi'(t)$ 是减函数)，即 $g'(t_0)>0$，可推知，对 $t_1\in(t_0,1)$，有 $\dfrac{\varphi(t_1)}{\ln t_1}>\dfrac{\varphi(t_0)}{\ln t_0}>t_0\varphi'(t_0)>t_1\varphi'(t_1)$，因此 $g'(t_1)>0$，与 $g(t)=\dfrac{\varphi(t)}{\ln t}$ 是减函数矛盾. 证毕.

引理2[1] 设 C 是由 φ 生成的阿基米德联系函数，且 φ 是连续可导的减函数，那么 $P\{C(u,v)\leqslant t\}=t-\dfrac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}$.

定理7 设连续随机变量 X，Y 的联系函数 C 是由 φ 生成的阿基米德联系函数，且 φ 是连续可导的减函数，如果 $\varphi(t)<-\dfrac{1}{4}\varphi'(t)$（如果 $>$)，那么随机变量 X，Y 是相对正(负)相依.

证明：因为 φ 是连续可导的减函数，则 $\varphi'(t)<0$. 由文献[1]中 Kendall 相依系数定义，记

$K_C(t)=P\{C(u,v)\leqslant t\}$

$$\begin{aligned}\tau_C=Q(C,C)&=4\iint_{I^2}C(u,v)dC(u,v)-1=4\int_0^1 t\,dK_C(t)-1=3-4\int_0^1K_C(t)dt\\&=3-4\int_0^1\left[1-\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}\right]dt=1+4\int_0^1\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt=4\int_0^1\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}+\frac{1}{4}\right]dt>0\end{aligned}$$

所以随机变量 X，Y 是相对正(负)相依的.

参考文献：

[1] Roger B. Nelsen. An Introduction to copulas[M]. New York: Soringer-Verlg, 1999.

[2] Guo Tie-Xin. Survey of Recent Developments of Random Metric Theory and Its Applications in China (Ⅰ). 应用泛函分析学报[J]. 2001, 3(2): 129－158.

[3] Guo Tie-Xin. Survey of Recent Developments of Random Metric Theory and Its Applications in China (Ⅱ). 应用泛函分析学报[J]. 2001, 3(3): 208－230.

Several Relations in the Generators of Copulas and the Dependence of Random Variables

YI Wen-de

Dept. of Mathematics & Computer Science, Chongqing University of Arts and Sciences, Yongchuan Chongqing 402160, China

Abstract: In this paper, Archimedean Copulas are applied to study the dependence and the independence of random variables, to analyse the form of the generator of Archimedean Copulas of dependence and independence random variables, and firstly the conceptions of the completely positive (negative) dependence and relatively positive (negative) dependence are proposed and the generators of Archimedean Copulas should satisfy the condition when random variables are positive (negative) dependence.

Key words: Archimedean Copula; generator; dependence; independence

责任编辑 张 枸