文章编号：1000－5471(2007)03－0040－03

(2＋1) 维 BBM 方程的精确解①

夏　莉

重庆工商大学 理学院，重庆 400067

摘要：通过行波约化一类(2＋1)维非线性波动方程和建立与立方非线性 Klein-Gordon 方程间变换的联系，由此得到其精确解和孤立波解.

关　键　词：(2＋1) 维非线性波动方程；非线性 Klein-Gordon 方程；精确解；孤波解

中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A

非线性发展方程精确解的研究在理论及应用上都有着重要意义. 非线性发展方程的孤波解、椭圆余弦波解及周期波解等特解结构的研究也推动孤立子理论的发展. 使用"齐次平衡法""双曲正切函数展开法"等方法来研究其解的结构，研究对象也由(1＋1)维和(2＋1)维可积模型向更高维可积模型发展，获得了冲击波解和孤立子解. 文献[1]、[2]利用 Jacobi 椭圆函数展开式已求得(1＋1)、(2＋1)维可积模型方程的广义周期解. 本文通过行波约化方程，建立起(2＋1)维非线性波动方程与一维立方非线性 Klein-Gordon(NKG)方程间的联系[3]，利用 NKG 方程的解和 Jacobi 椭圆函数求出了一类非线性(2＋1)维波动方程新的精确解和孤立波解.

1　(2＋1)维 BBM 方程的行波约化及与 NKG 方程间的变换

为描述非线性色散介质中单向长波的传播，文献[4]提出了其模型方程

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxt} = 0 \tag{1}$$

其中 α,β 为非零实数，β 为色散系数. 该方程在双温热传导问题、岩石裂缝中的渗流问题等方面有重要应用，被认为是 KdV 方程的替代方程. 在此基础上，文[5]提出了二维 BBM 方程

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u u_x + \delta u u_y - u_{xxt} - u_{yyt} = 0 \tag{2}$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为任意实数且 γ,δ 非零.

设 $\xi = k_1 x + k_2 y - ct$，这里 k_1, k_2 和 c 均为非零常数.

$$u = u(\xi) = u(k_1 x + k_2 y + k_3 z - ct) \tag{3}$$

代(3)入(2)，经整理得

$$a u_{\xi\xi} + b u^2 + h u + D = 0 \tag{4}$$

其中 $a = c(k_1^2 + k_2^2)$，$b = \dfrac{k\gamma + k_2\delta}{2}$，$h = k_1\alpha + k_2\beta - c$，$D$ 为积分常数.

下面建立(4)与非线性 Klein-Gordon 方程的联系. 假设方程(4)的解可表为

① 收稿日期：2006－10－19

基金项目：重庆市教委自然科学基金资助项目 (KJ060709).

作者简介：夏　莉(1956－)，女，重庆人，副教授，主要从事非线性偏微分方程的研究.

$$u = A + B\varphi^2(\xi) \tag{5}$$

这里 φ 是立方 NKG 方程的解，且满足

$$\varphi_\xi^2 = c_0 + \lambda\varphi^2 + \frac{\mu}{2}\varphi^4 \tag{6}$$

$$\varphi_{\xi\xi} = \lambda\varphi + \mu\varphi^3 \tag{7}$$

代(5)－(7)入(4)，并令 φ 的同类幂次的系数为零，要求 k_1, k_2, k_3, k_4 均不为零且设 $B \neq 0$，得

$$A = -\frac{h + 4a\lambda}{2b} \tag{8}$$

$$B = -\frac{3a\mu}{b} \tag{9}$$

$$D = \frac{h^2 - 16a^2\lambda^2 + 24a^2\mu c_0}{4b} \tag{10}$$

这 里 a, b, h 均为任意常数.

从以上得：若 $\varphi(\xi)$ 是方程(6),(7) 的解，则方程(5) 的解 $u(\xi)$ 就是方程(2) 的解.

2　(2＋1)维 BBM 方程的精确解和孤波解

由方程(6),(7)可以得到许多(2＋1)维方程的精确解，现就一些特殊情况给出方程(2)的精确解和孤波解.

(i) $\lambda<0$，$\mu>0$ 时，方程(2)的精确解为

$$u = A - \frac{2\lambda k B}{\mu(1+k^2)}\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{-\lambda}{1+k^2}}(\xi-\xi_0),\ k\right]$$

当 $k\to1$ 时，$\mathrm{sn}\ \xi\to\tanh\ \xi$，有扭状孤立子解

$$u = A - \frac{\lambda B}{\mu}\tanh^2\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}(\xi-\xi_0)$$

(ii) $\lambda<0$，$\mu<0$ 时，方程(2)的精确解为

$$u = A - \frac{2\lambda k B}{\mu(2-k^2)}\mathrm{dn}^2\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2-k^2}}(\xi-\xi_0),\ k\right]$$

当 $k\to1$ 时，$\mathrm{dn}\ \xi\to\mathrm{sech}\ \xi$，且

$$u = A - \frac{2\lambda B}{\mu}\mathrm{sech}^2\sqrt{\lambda}(\xi-\xi_0)$$

(iii) $\lambda>0$，$\mu>0$ 时，方程(2)的精确解为

$$u = A + \frac{2\lambda B}{\mu(2-k^2)}\mathrm{cs}^2\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2-k^2}}(\xi-\xi_0),\ k\right]$$

当 $k\to1$ 时，$\mathrm{cs}\ \xi\to\mathrm{sech}\ \xi$，且

$$u = A + \frac{2\lambda B}{\mu}\mathrm{sech}^2\sqrt{\lambda}(\xi-\xi_0)$$

3　结　论

本文通过将(2＋1)维非线性方程进行行波约化后建立与立方非线性 NKG 方程的代数变换，从而得到了这类(2＋1)维非线性方程的精确解和孤立波解. 这样，既简化了仅用 Jacobi 椭圆函数求解过程的复杂性，也丰富了这类高维非线性偏微分方程的精确解.

参考文献:

[1] Liu S K, FU Z T, Liu S D, Zhao Q. Expansion Method About the Jacobi Elliptic Function and Its Applications to Nonlinear Wave Equations [J]. Acta phys Sin, 2001, 50: 2068－2073.

[2] Liu S K, LFU Z T, Liu S D, Zhao Q. New Periodic Solutions to a Kind of Nonlinear Wave Equations [J]. 物理学报, 2002, 51: 5－14.

[3] Kinoshita M, Hirano Y, Kuwabara M, et al. Effects of site-type and Bond-type disorders of the dynamics of charged and neutral solitons [J]. J Phys Soc Jpn, 1997, 66: 703－706.

[4] Benjam in T B, Bins J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems [J]. Philos Trans Roy Soc London, 1972, (272A): 47－78.

[5] Goldstein J A, Kajikiya R, Oharu S. On some Nonlinear dispersive Equations in several space varibles [J]. Differential and integral Equations, 1990, 3(4): 617－632.

Exact Solutions to (2＋1)-Dimensional BBM Equation

XIA Li

College of Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: The (2＋1)-dimensional the equation and the equations were reduced by using traveling method. The new exact solutions and the solitary wave solutions are obtained by using transformation relation of the cubic nonlinear Klein-Gordon equation.

Key words: (2＋1)-dimensional nonlinear wave equation; nonlinear Klein-Gordon equation; exact solutions; solitary wave solutions

责任编辑 覃吉康