第 32 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2007 年 6 月
Vol. 32 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science)　　Jun. 2007

文章编号：1000-5471(2007)03-0036-04

关于准次正定矩阵①

李庆玉，　代洪霞

重庆工商大学 理学院，重庆 400067

摘要：研究准次正定矩阵的性质及行列式理论. 得到了判定准次正定矩阵的几个充要条件，以及准次正定矩阵的几个行列式不等式. 并将著名的 Fejer 定理、Minkowski 不等式及 Hadamard 不等式拓广到了准次正定阵上，扩大了 Minkowski 不等式的指数范围.

关　键　词：准次正定矩阵；次亚正定矩阵；亚正定矩阵；行列式；不等式

中图分类号：O151.21　　　**文献标识码：A**

研究实矩阵的正定性是矩阵论中的热门课题之一. 随着应用的需要和研究的深入，矩阵的正定性已有许多推广[1-10]. 文[9]提出了准次正定阵的概念，并研究了它的基本性质. 本文在此基础上进一步研究了准次正定阵的性质及行列式理论，取得了一些新的结果，将著名的 Fejer 定理及 Minkowski、Hadamard 等著名不等式拓广到了准次正定阵上，扩大了 Minkowski 不等式的指数范围.

本文用 $J_n = J$ 表次对角线元素全为 1，其余元素全为 0 的 n 阶方阵；A^{T}，$|A|$ 与 $\|A\|$ 分别表矩阵 A 的转置、行列式及其模；$A \circ B$ 表矩阵 A，B 的 Hadamard 积，$A > 0$ ($A \geqslant 0$) 表 A 为对称正定(半正定)阵. $R^{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 实矩阵集；D_n^+ 表 n 阶正对角阵集；$S_n^+ = \{A \in P_I \mid A^{\mathrm{T}} = A\}$ 表 n 阶实对称正定阵集；令 $D \in D_n^+$，则 $P_D = \{A \in R^{n\times n} \mid \forall\, 0 \neq X \in R^{n\times 1}, X^{\mathrm{T}} DAX > 0\}$ 表文献[3]中的 n 阶广义正定阵集，特别 P_I 表 n 阶亚正定阵集.

设 $A \in R^{m\times n}$，A 为次对称矩阵[9]. 则

(1) $(A^S)^S = A$，$(A^{-1})^S = (A^S)^{-1}$，$(A+B)^S = A^S + B^S$，$(AB)^S = B^S A^S$；

(2) $J_n A^S J_m = A^T$，$J_n A^T J_m = A^S$；

(3) $J^S = J$，$J^T = J$，$J^{-1} = J$，$J^2 = I$.

若 A 为 n 阶 D- 准次正定矩阵[9]，记为 $A \in P_{JD} = \{A \in R^{n\times n} \mid \forall\, 0 \neq X \in R^{n\times 1}, X^S DAX > 0\}$；否则，记为 $A \in P_{\overline{JD}}$. 当 $D = I$ (n 阶单位阵)时，$P_{JD} = P_{JI} = P_J = \{A \in R^{n\times n} \mid \forall\, 0 \neq X \in R^{n\times 1}, X^S AX > 0\}$ 为 n 阶次亚正定矩阵[8] 集，$S_n^- = \{A \in P_J \mid A^S = A\}$ 为 n 阶次对称次正定矩阵[8] 集.

1　准次正定矩阵的判定条件

定理 1　设 $D \in D_n^+$，则 $A \in P_{JD}$ 当且仅当存在可逆阵 $Q \in R^{n\times n}$，使

$$Q^S DAQ = \mathrm{sdiag}\left(1, \cdots, 1, \begin{pmatrix} -a_s & 1 \\ 1 & a_s \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\right)$$

其中 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_s > 0$.

证　由文献[9]的定理及文献[4]知：$A \in P_{JD}$ 当且仅当 $JDA \in P_I$，又当且仅当存在可逆阵 $Q \in R^{n\times n}$，

$$Q^T JDAQ = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -a_s & 1 \\ 1 & a_s \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1\right)$$

---

① 收稿日期：2006-11-07

基金项目：重庆市科技攻关资助项目 (CSTC2006EA0005)

作者简介：李庆玉(1963-)，女，重庆人，副教授，主要从事矩阵论及经济应用的研究.

其中 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_s > 0$）．即

$$Q^S DAQ = JQ^T JDAQ = \mathrm{sdiag}\left(1, \cdots, 1, \begin{pmatrix} -a_s & 1 \\ 1 & a_s \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\right)$$

定理 2　设 $D \in D_n^+$，$A \in R^{n\times n}$，$F = JD$，FA 为正规矩阵，则 A 为 D -准次正定矩阵当且仅当 FA 的任一特征值 $\lambda(FA)$ 的实部为正，即 $\mathrm{Re}\,\lambda(FA) > 0$.

证　由文献[9]知，必要性显然成立.

充分性：因 FA 为 n 阶实正规阵，所以存在 n 阶正交阵 U，使

$$U^T FAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

$$U^T[FA + (FA)^T]U = 2\,\mathrm{diag}(\mathrm{Re}\,\lambda_1, \mathrm{Re}\,\lambda_2, \cdots, \mathrm{Re}\,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 FA 的特征值.

由 $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 可知：$FA + (FA)^{\mathrm{T}} > 0$，故由文献[2]知：$FA$ 为实亚正定阵，A 为 D -准次正定矩阵.

推论 1　设 $D \in D_n^+$，$A \in R^{n\times n}$，$F = JD$，FA 为 n 阶严格对角占优的实正规阵，且主对角元全为正数，则 A 为 D -准次正定矩阵.

证　设 λ 为 $FA = (a_{ij})$ 的任一特征值，由 Gersgorin 圆盘定理知：存在 $i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，使

$$|\,\mathrm{Re}(\lambda) - a_{ii}\,| = |\,\mathrm{Re}(\lambda - a_{ii})\,| \leqslant |\,\lambda - a_{ii}\,| \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |\,a_{ij}\,|$$

所以由 FA 为严格对角占优矩阵可知：$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant a_{ii} - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} |\,a_{ij}\,| > 0$.

又 FA 为实正规阵，所以由定理 2 知：A 为 D -准次正定矩阵.

定理 3　设 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$D \in D_n^+$，$F = JD$，$A^{-1/2}FBA^{1/2}$ 为实正规阵，则 BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 $\mathrm{Re}\,\lambda(FB) > 0$.

证　因为$(A^{-1/2})^{\mathrm{T}}(FBA)A^{-1/2} = A^{-1/2}FBA^{1/2}$，且 $A^{-1/2}FBA^{1/2}$ 为实正规阵，故 BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 FBA 为实亚正定阵，当且仅当 $A^{-1/2}FBA^{1/2}$ 为实亚正定阵，当且仅当 $\mathrm{Re}\,\lambda(A^{-1/2}FBA^{1/2}) = \mathrm{Re}\lambda(FB) > 0$.

定理 4　设 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$D \in D_n^+$，$F = JD$，$(FBA)(A^{-1}FB)^T = (FBA)^T(A^{-1}FB)$，则 BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 $\mathrm{Re}\,\lambda(FB) > 0$.

证　因为 $A > 0$，$(FBA)(A^{-1}FB)^T = (FBA)^T(A^{-1}FB)$，所以分别用 $A^{-1/2}$ 左乘、用 $A^{1/2}$ 右乘等式两端得：$(A^{-1/2}FBA^{1/2})(A^{-1/2}FBA^{1/2})^{\mathrm{T}} = (A^{-1/2}FBA^{1/2})^{\mathrm{T}}(A^{-1/2}BFA^{1/2})$，即 $A^{-1/2}FBA^{1/2}$ 为实正规阵，于是由定理 3 知：定理 4 成立.

定理 5　设 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$D \in D_n^+$，$F = JD$，$AFB = FBA$，FB 为实正规矩阵，则 BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 $\mathrm{Re}\,\lambda(FB) > 0$.

证　因 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$AFB = FBA$，FB 为实正规矩阵，则

$$\begin{aligned}(FBA)(A^{-1}FB)^{\mathrm{T}} &= (FBA)(FBA^{-1})^{\mathrm{T}} = FB(FB)^{\mathrm{T}} = (FB)^{\mathrm{T}}FB \\ &= (FB)^{\mathrm{T}}AA^{-1}FB = (AFB)^{\mathrm{T}}(A^{-1}FB)\end{aligned}$$

于是由定理 4 知：定理 5 成立.

由定理 5 易得：

推论 2　设 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$D \in D_n^+$，$F = JD$，$(FB)^{\mathrm{T}} = FB$，$AFB = FBA$，则 BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 $\mathrm{Re}\,\lambda(FB) > 0$.

由推论 2 易得：

推论 3　设 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$B > 0$，则 $AB > 0$ 当且仅当 $AB = BA$.

定理 6　设 $A, B \in R^{n\times n}$，$A > 0$，$D \in D_n^+$，$F = JD$，FB 为 n 阶实正规矩阵，$AFB = FBA$，则 BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 B 为 D -准次正定矩阵.

证　由定理 5 及定理 2 可知：BA 为 D -准次正定矩阵当且仅当 $\mathrm{Re}\,\lambda(FB) > 0$，当且仅当 B 为 D -准次正定矩阵.

定理 7　设 $D \in D_n^+$，$F = JD$，则 $A \in P_D$ 当且仅当对任意 $B \in R^{n\times n}$，$B \geqslant 0$，$r(B) = 1$，有

$$\mathrm{tr}(FAB) > 0$$

证 首先指出，n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$ 为秩为 1 的半正定对称矩阵当且仅当存在 $0 \neq X \in R^{n\times 1}$，使 $B=XX^{\mathrm{T}}$. 此时对 n 阶矩阵 $FA=(a_{ij})$，有

$$\mathrm{tr}(FAB)=\mathrm{tr}(FAB^{\mathrm{T}})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}FAX$$

故 $A\in P_D$ 当且仅当 $FA=JDA\in P_I$，当且仅当 $\forall\, 0\neq X\in R^{n\times 1}$，$X^TFAX>0$，当且仅当 $\forall\, B\geqslant 0$，$B\neq 0$，有 $\mathrm{tr}(FAB)>0$.

推论 4 设 $D\in D_n^+$，$F=JD$，则 $A\in P_D$ 当且仅当 $\forall\, B\in R^{n\times n}$，$B\geqslant 0$，有 $\mathrm{tr}(FAB)>0$.

证 由定理 7 知充分性成立. 因为任何秩为 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 的半正定对称矩阵都可表为 k 个秩为 1 的半正定对称矩阵之和，故再由定理 7 得证必要性.

推论 4 推广了 Fejer 定理[6].

2 准次正定矩阵的行列式不等式

定理 8 设 $D\in D_n^+$，$A\in P_{JD}$，则当 n 等于 $4k$ 或 $4k+1$ 时，$|A|>0$；当 n 等于 $4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$|A|<0$.

证 因 $A\in P_{JD}$，故 $JDA\in P_I$，由文献[2]知：$|J||D||A|=|JDA|>0$，又 $|D|>0$，$|J|=(-1)^{n(n-1)/2}$，故定理 8 成立.

推论 5 设 $D\in D_n^+$，n 等于 $4k$ 或 $4k+1$，则 $A\in P_{JD}$ 当且仅当 A 的伴随阵 $A^*\in P_{JD^S}$

证 因 $A\in P_{JD}$，故由推论 1 知：$JDA\in P_I$，由文献[2]知：$|J||D||A|=|JDA|>0$，又 $D\in D_n^+$，$|D|>0$，$|J|=(-1)^{n(n-1)/2}=1$，所以 $|A|>0$，而 $A^*=|A|A^{-1}$，故由文献[9]的定理 1 及定理 3 可知推论 5 成立

定理 9 设 $D\in D_n^+$，$A,B\in P_{JD}$，$(DB)^S=DB$，$2t$ 为 $B^{-1}A$ 的非实特征值个数，且 $m\geqslant 1/(n-t)$，则

$$\|A+B\|^m\geqslant\|A\|^m+\|B\|^m$$

特别，当 $t=0$ 时，有广义 Minkowski 不等式：$\|A+B\|^{1/n}\geqslant\|A\|^{1/n}+\|B\|^{1/n}$.

证 因 $A,B\in P_{JD}$，故 $JDA,JDB\in P_I$，又 $(DB)^S=DB$，故 $JDB\in S_n^+$，再 $(JDB)^{-1}(JDA)=B^{-1}A$ 的非实特征值个数为 $2t$，$m(n-t)\geqslant 1$，故由文献[5]知：

$$\|JDA+JDB\|^m\geqslant\|JDA\|^m+\|JDB\|^m$$

两边消去 $\|JD\|^m$，得证结论.

定理 9 将经典 Minkowski 不等式拓广到了准次正定阵上，且其指数范围扩大至 $[1/(n-t),\infty)$.

定理 10 设 $D\in D_n^+$，$A,B\in P_{JD}$，$(DB)^S=DB$，$2t$ 为 $B^{-1}A$ 的非实特征值个数，则

$$\|A+B\|^{1/n}\geqslant(\|A\|^{1/n}+\|B\|^{1/n})/\sqrt[n]{2^t}$$

特别，由 $t/n\leqslant 1/2$ 有：$\|A+B\|^{1/n}\geqslant(\|A\|^{1/n}+\|B\|^{1/n})/\sqrt{2}$.

证 因 $A,B\in P_{JD}$，故 $JDA,JDB\in P_I$，又 $(DB)^S=DB$，故 $JDB\in S_n^+$，再 $(JDB)^{-1}(JDA)=B^{-1}A$ 的非实特征值个数为 $2t$，于是由文献[5]的定理 5 知：

$$\|JDA+JDB\|^{1/n}\geqslant(\|JDA\|^{1/n}+\|JDB\|^{1/n})/\sqrt[n]{2^t}$$

即 $\|A+B\|^{1/n}\geqslant(\|A\|^{1/n}+\|B\|^{1/n})/\sqrt[n]{2^t}$.

推论 6 设 $D\in D_n^+$，$A,B\in P_{JD}$，$(DB)^S=DB$，$2t$ 为 $B^{-1}A$ 的非实特征值个数，则

(1) 当 $t=0$，$n\geqslant 2$ 时，$\|A+B\|>\|A\|+\|B\|$；

(2) $\forall\, q\in[0,1]$，有 $\|qA+(1-q)B\|\geqslant(\|A\|^q\|B\|^{1-q})/2^t$；

特别地，当 $t=0$ 时，有广义 Ky Fan 不等式：$\|qA+(1-q)B\|\geqslant\|A\|^q\|B\|^{1-q}$，$q\in[0,1]$.

证 (1) 由条件及定理 10 知：$\|A+B\|^{1/n}\geqslant\|A\|^{1/n}+\|B\|^{1/n}$，两边 n 次方得：

$$\|A+B\|>\|A\|+\|B\|$$

(2) 由条件及文献[9]的定理 1 知：$\forall\, q\in(0,1)$，$qA,(1-q)B\in P_{JD}$，于是由条件及定理 10 有

$$\begin{aligned}\| qA+(1-q)B \|^{1/n} &\geqslant (\| qA \|^{1/n} + \| (1-q)B \|^{1/n}) / \sqrt[n]{2^t} \\ &= (q \| A \|^{1/n} + (1-q) \| B \|^{1/n}) / \sqrt[n]{2^t} \\ &\geqslant \| A \|^{q/n} \| B \|^{(1-q)/n} / \sqrt[n]{2^t}\end{aligned}$$

两边 n 次方得：$\| qA+(1-q)B \| \geqslant (\| A \|^{q} \| B \|^{1-q})/2^t$；当 $q=0$ 或 $q=1$ 时，不等式显然成立.

定理 11　设 $D \in D_n^+$，$A \in P_{JD}$，JDB 为 n 阶实对称半正定阵，$r(B)=r\ (0<r<n)$，则

$$\| A+B \| > \| A \|$$

证　因 JDB 为 n 阶实对称半正定阵，且 $r(JDB)=r(B)=r$，$0<r<n$，又 $A \in P_{JD}$，故 $JDA \in P_I$，于是由文献[2]的定理 3 知：$\| JDA+JDB \| > \| JDA \|$，即 $\| A+B \| > \| A \|$.

定理 12　设 $D=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n) \in D_n^+$，$A=(a_{ij}) \in P_{JD}$，则

$$\| (A+D^{-1}A^S D^S)/2 \| \leqslant a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}$$

证　因 $A \in P_{JD}$，故 $JDA \in P_I$，由文献[5]知：

$$JD(A+D^{-1}A^S D^S)/2 = [(JDA)+(JDA)^T]/2 \in S_n^+$$

由文献[2]的系 1.1 得：$\| JD(A+D^{-1}A^S D^S)/2 \| \leqslant (d_n a_{n1})(d_{n-1}a_{(n-1)2})\cdots(d_1 a_{1n})$，因 $\| JD \| = d_1 d_2 \cdots d_n$，故结论得证.

在定理 12 中取 $D=I$，$A^S=A$，便得与著名的 Hadamard 不等式相应的结果：

推论 7　设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶次对称次正定矩阵，则 $\| A \| \leqslant a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}$

参考文献：

[1] Johnson C R. Positive definite matrices [J]. Amer Math Monthly, 1970, 77: 259－264.
[2] 屠伯埙. 亚正定阵理论(II) [J]. 数学学报，1991，34(1)：91－102.
[3] 佟文廷. 广义正定矩阵 [J]. 数学学报，1984，27(6)：801－810.
[4] 李炯生. 对称部分为半正定的方阵 [J]. 数学学报，1996，39(3)：376－381.
[5] 胡永建、陈公宁. 有关实正定阵的一些性质 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，1996，31(1)：40－46.
[6] Hom R A. Johnson C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
[7] 詹仕林. 次亚正定矩阵的判定 [J]. 纯粹数学与应用数学，2003，19(2)：191－196.
[8] 袁晖坪. 次亚正定矩阵 [J]. 数学杂志，2000，20(2)：102－105.
[9] 袁晖坪. 准次正定矩阵 [J]. 纯粹数学与应用数学，2001，17(1)：14－22.
[10] 于江明，谢清明. 次正定 Hermite 矩阵次 Schur 补的性质 [J]. 数学杂志，2006，26(2)：185－190.

On the Almost Positive Subdefinite Matrices

LI Qing-yu,　DAI Hong-xia

College of Sciences, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: The properties and determinant theories of the almost positive subdefinite matrix and determinant are discussed. The judging by seven necessary and sufficient conditions and five determinant inequalities of almost positive subdefinite matrix is established. As applications, some famous theorems and inequalities named after Fejer, Minkowski and Hadamard are generalized, and the index scope of Minkowski inequality is enlarged.

Key words: almost positive subdefinite matrix; metapositive subdefinite matrix; metapositive definite matrix; determinant; inequality

责任编辑　覃吉康