第 32 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2007 年 6 月
Vol. 32 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science) Jun. 2007

文章编号：1000－5471(2007)03－0033－03

分担值与正规函数①

刘礼培[1]， 袁建军[2]

1. 重庆文理学院 数学与计算机科学系，重庆 永川 402160；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究函数的分担值与正规族的关系. 证明了：

设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数，a 是一个非零的有穷复数，f 零点的重数至少为 k，且满足

(i) $f(z)=0$ 当且仅当 $f^{(k)}(z)=0$；

(ii) 当 $f^{(k)}(z)=a$ 时，$f(z)=a$.

则 $f(z)$ 是复平面上的正规函数.

关　键　词： 亚纯函数；正规族；分担值

中图分类号：O174.52 **文献标识码：A**

定义 1 一个亚纯函数被称为正规函数，若存在一个正整数 M，使得

$$f^{\#}(z)\leqslant M$$

其中 $f^{\#}(z)=\dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ 是 $f(z)$ 的球面导数.

关于函数的分担值与正规族的研究已有不少的结果[1-8]. 本文在已有工作的基础上，考虑能否把条件"f 和 f' IM 分担 a"减弱的问题.

为了证明我们的结论，先给出如下的引理：

引理 1[9] 设 g 是有限级的亚纯函数，如果 g 仅有有限多个临界值，则 g 只有有限多个渐近值.

引理 2[10] 设 g 是一超越亚纯函数，有 $g(0)\neq\infty$ 并且 g 的有限的临界值和渐近值的点集是有界的，则存在 $R>0$，使得对所有不是 g 的极点的 $z\in C\setminus\{0\}$，有：

$$|g'(z)|\geqslant\frac{|g(z)|}{2\pi|z|}\log\frac{|g(z)|}{R}$$

引理 3[11] 设 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0+q(z)/p(z)$，这里的 $a_n(\neq 0)$，a_{n-1}，…，a_0 是常数，$p(z)$，$q(z)$为互素的不同时为 0 的多项式且 $\deg q<\deg p$，k 为正整数. 如果 $f^{(k)}\neq 1$，则

$$f(z)=\frac{z^k}{k!}+\cdots+a_0+\frac{1}{(az+b)^m}$$

其中 $a(\neq 0)$，b 为常数，m 为正整数.

引理 4[12] 假设 $f(z)$为复平面上的超越亚纯函数，l 为正整数. 则当 $r\to\infty$ 时

$$T(r,f)\leqslant\left(2+\frac{1}{l}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(2+\frac{2}{l}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(l)}-1}\right)+S(r,f)$$

引理 5 设 F 是单位圆 Δ 上的亚纯函数族，a 是一个非零的有穷复数，$\forall f\in F$，$f(z)$ 零点的重数至少为 k，且满足

(i) $f(z)=0$ 当且仅当 $f^{(k)}(z)=0$；

① 收稿日期：2006－04－03

作者简介：刘礼培(1980－)，男，江西萍乡人，讲师，主要从事复分析的研究.

(ⅱ) 当 $f^{(k)}(z)=a$ 时，$f(z)=a$.

则 F 在 Δ 上正规.

证 若 F 不正规，则由文献[5]的定理知，存在 $f_n\in F$，$z_n\in\Delta$ 和 $\rho_n\to 0^+$，使得

$$g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)\to g(\zeta)$$

其中收敛是按球面距离内闭一致收敛. g 是 C 上的非常数的亚纯数，$g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=k|a|+1$，且 g 的级至多为 2. 由于 $g_n(\zeta)$ 的零点重数至少为 k，由 Hurwitz's 定理，$g(\zeta)$ 的零点重数也至少为 k. 我们断言：

1) $g(\zeta)=0$ 当且仅当 $g^{(k)}(\zeta)=0$；

2) $g^{(k)}(\zeta)\neq a$.

事实上，假设存在 $g(\zeta_0)=0$，因为 $g(\zeta)\not\equiv 0$，则存在 $\zeta_n\to\zeta_0$，使得 $g_n(\zeta_n)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$ (n 充分大)，则 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，由条件有

$$f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=0 \qquad g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$$

因为 $g^{(k)}(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n^{(k)}(\zeta_n)$，所以 $g^{(k)}(\zeta_0)=0$，即当 $g(\zeta)=0$ 时 $g^{(k)}(\zeta)=0$.

假设存在 $g^{(k)}(\zeta_0)=0$，因为 $g^{(k)}(\zeta)\not\equiv 0$. 否则，$g(\zeta)$ 为次数至多为 $k-1$ 次的多项式，则 $g^{(k-1)}(\zeta)$ 为常数，由于 $g(\zeta)$ 的零点重数至少为 k，所以有 $g^{(k-1)}(\zeta)$ 也恒为 0，依次可以推出 $g'(\zeta)\equiv 0$，因此 g 为常数，矛盾. 因此存在 $\zeta_n\to\zeta_0$，使得 $g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$ (n 充分大)，由条件有 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，从而 $g_n(\zeta_n)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，$g(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\zeta_n)=0$，即当 $g^{(k)}(\zeta)=0$ 时 $g(\zeta)=0$. 证明了 1) 成立.

我们假设存在 ζ_0 使得 $g^{(k)}(\zeta_0)=a$，则 $g^{(k)}(\zeta)\not\equiv a$. 否则，由于 $g(\zeta)$ 的零点重数至少为 k，因此 $g(\zeta)$ 只有一个零点设为 ζ_1，因此 $g(\zeta)=\dfrac{a(\zeta-\zeta_1)^k}{k!}$，经过简单计算，我们有

$$g^{\#}(0)\leqslant\begin{cases}\dfrac{k}{2} & |\zeta_1|\geqslant 1\\ |a| & |\zeta_1|<1\end{cases}$$

这与 $g^{\#}(0)=k|a|+1$ 矛盾. 所以存在 $\zeta_n\to\zeta_0$，使得 $g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$ (n 充分大)，所以由条件当 $f^{(k)}=a$ 时 $f=a$，得到 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$，从而

$$g_n(\zeta_n)=f_n(z_n+\rho_n^k\zeta_n)/\rho_n^k=a/\rho_n^k$$

令 $n\to\infty$，我们有 $g(\zeta_0)=\infty$，与 $g^{(k)}(\zeta_0)=a$ 矛盾.

假设 $g(\zeta)$ 为超越亚纯函数，由引理 4，我们可以推出 $g(\zeta)$ 有无限个零点 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots$，我们令 $h(\zeta)=g^{(k-1)}(\zeta)-a\zeta$，则 $h'(\zeta)=g^{(k)}-a$. 显然 $h(z)$ 为有限级的亚纯函数且 $h'(\zeta)\neq 0$. 因此由引理 1 和引理 2，存在 $R>0$，使得

$$\frac{|\zeta_n h'(\zeta_n)|}{|h(\zeta_n)|}\geqslant\frac{1}{2\pi}\log\frac{|h(\zeta_n)|}{R}=\frac{1}{2\pi}\log\frac{|a\zeta_n|}{R}$$

取特殊情形，当 $n\to\infty$ 时，有 $\dfrac{|\zeta_n h'(\zeta_n)|}{|h(\zeta_n)|}\to\infty$. 而另一方面，$\dfrac{|\zeta_n h'(\zeta_n)|}{|h(\zeta_n)|}=1$，矛盾. 由 1) 和 2) 我们知道 $g(\zeta)$ 不可能为多项式. 因此，$g(\zeta)$ 为有理函数. 我们假设

$$g(\zeta)=a_n\zeta^n+a_{n-1}\zeta^{n-1}+\cdots+a_0+q(\zeta)/p(\zeta)$$

这里的 $a_n(\neq 0),a_{n-1},\cdots,a_0$ 是常数，$p(z),q(z)$ 为互素的多项式且 $\deg q<\deg p$，n 为正整数. 由引理 3，有

$$g(\zeta)=a\frac{\zeta^k}{k!}+\cdots+b+\frac{B}{(\zeta+c)^m} \qquad g^{(k)}(\zeta)=a-\frac{m\cdots(m+k-1)B}{(\zeta+c)^{m+k}}$$

这里 $b,c,B\neq 0$ 为常数，m 为正整数. 因为 g 的零点的重数至少为 k. 因此 $g(\zeta)$ 最多有 $(m+k)/k$ 个不同的零点. 然而 $g^{(k)}(\zeta)$ 有 $m+k$ 个不同的零点，与 $g=0$ 当且仅当 $g^{(k)}=0$ 矛盾. 所以，则 F 在 Δ 上正规.

定理 1 设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数，a 是一个非零的有穷复数，f 零点的重数至少为 k，且满足

(ⅰ) $f(z)=0$ 当且仅当 $f^{(k)}(z)=0$；

(ⅱ) 当 $f^{(k)}(z)=a$ 时 $f(z)=a$.

则 $f(z)$是复平面上的正规函数.

证　若 f 不是正规函数，则存在 $z_n \to \infty$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} f^{\#}(z_n)=\infty$. 记 $f_n(z)=f_n(z+z_n)$ 和 $F=\{f_n\}$. 由 Marty's 正规定则知道，F 不正规. 但另一方面，因为 $f_n(z)=0$ 当且仅当 $f_n^{(k)}(z)=0$，当 $f_n^{(k)}(z)=a$ 时有 $f_n(z)=a$，由引理 5 知道 F 正规，矛盾. 定理 1 得证.

参考文献：

[1] Schwick W. Sharing values and normality [J]. Arch Math，1993：50－54.

[2] 方明亮.关于分担值与正规族的一点注记 [J]. 数学研究，1996，(4)：29－32.

[3] 章文华.分担值与正规族 [J]. 数学研究与评论，2005，(2)：307－310.

[4] Pang X C，Zalcman L. Normal families and shared values [J]. Bull Lodon Math Soc，2000，32：325－331.

[5] Fang M L. Picard values and normality criterion [J]. Bull Korean Math Soc，2001，38 (2)：379－387.

[6] Fang M L，Zalcman L. Normal families and shared values of meromorphic function [J]. Aaa Polon Math，2003，(80)：133－141.

[7] Fang M L，Zalcman L. Normal families and shared values of meromorphic function Ⅱ [J]. Comput Methods Funct Theory，2001，(1)：289－299.

[8] Fang M L，Zalcman L. Normal families and shared values of meromorphic function Ⅲ [J]. Comput Methods Funct Theory，2002，(2)：385－375.

[9] Bergweiler W，Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order [J]. Rev Mat Iberoamericana，1995，(11)：355－373.

[10] Bergweiler W. On the zeros of certain homogeneous differential polynomial [J]. Arch Math Basel，1995，(64)：199－202.

[11] Wang Y F，Fang M L. Picard values and normal families of meromorphic function with zeros [J]. Acta Math Sinica，1998，(14)：17－26.

[12] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford：Oxford University Press，1964.

Share Values and Normal Function

LIU Li-pei[1]，　YUAN Jian-jun[2]

1. Dept. of Mathematics and Computer Science，Chongqing College of Arts and Sciences，Yongchuan Chongqing 402160，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Let $f(z)$ be a meromorphic function on the complex plane，and a be a nonzeros finite complex number. The zeros of $f(z)$ are of multiplicity at least k. If $f(z)=0$ only if $f^{(k)}(z)=0$，$f(z)=a$ when $f^{(k)}(z)=a$. Then $f(z)$ is normal function on complex plane.

Key words：meromorphic function；normal family；share values

责任编辑　覃吉康