第 32 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2007 年 6 月
Vol. 32　No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science)　　Jun.　2007

文章编号：1000-5471(2007)03-0028-05

规范固定 Yang-Mills 热流的能量不等式与 Bochner 估计①

姚纯青

华东师范大学 数学系，上海 200062；西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 通过推导曲率及其高阶导数的演化式，得到了规范固定 Yang-Mills 热流的能量不等式和 Bochner 估计.

关　键　词： 规范固定；Yang-Mills 热流；能量不等式；Bochner 估计

中图分类号：O175.26；O186.16　　**文献标识码：A**

设 $P(M, G)$ 是以 n 维光滑可定向闭黎曼流形 M 为底流形，m 维紧致单纯李群 G 为结构群的主丛，$Ad(P)$ 是主丛 P 的以李代数 $\mathrm{Lie}(G)$ 为纤维型的伴随丛. 规范固定 Yang-Mills 热流[1] 为下列初值为 A_0 的关于联络 A_t 的演化方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = -\left(d_A^* F_A + d_A d_A^* (A - A_0)\right) \\ A|_{t=0} = A_0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 d_A 和 d_A^* 分别为联络 A 的共变外微分算子及其伴随算子，F_A 为联络 A 的曲率形式，局部可表示为

$$f_{\mu v} = \frac{\partial A_v}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^v} + [A_\mu, A_v] \tag{2}$$

若记 $A_t = A_0 + a_t$，其中 $a_t \in \Omega^1(Ad(P))$，A_0 为给定的联络，则方程(1) 等价于下列初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = -\left(d_A^* F_A + d_A d_A^* a\right) \\ a|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

为简便记，在不引起混淆的前提下，我们有时省略下标 t.

规范固定 Yang-Mills 热流是为了解决 Yang-Mills 热流的短时存在性而引入的[1]，所用想法源自文献[2]. 在研究抛物型方程和方程组时，能量不等式和 Bochner 估计式具有十分重要的作用. 它们在 Yang-Mills 热流中的应用见文献[3].

本文首先推导出了在规范固定 Yang-Mills 热流下，曲率及其高阶导数的演化方程，然后给出了规范固定 Yang-Mills 热流所相应的能量不等式和 Bochner 估计式及其证明.

1　曲率及其高阶导数的演化

从关于联络的规范固定 Yang-Mills 热流的演化方程可自然地推导出曲率相应的演化方程. 对曲率关

① 收稿日期：2006-03-28
基金项目：西南大学发展基金资助项目 (40100306).
作者简介：姚纯青(1962-)，男，四川绵竹人，副教授，主要从事微分几何的研究.

于时间 t 求导，再代入联络的演化方程(1)或(3)，我们就有

定理 1　曲率的演化满足方程：

$$\frac{\partial f_{\mu\upsilon}}{\partial t}=g^{\alpha\beta}(f_{\mu\upsilon\|\alpha\beta}+2g^{\lambda\gamma}R_{\alpha\mu\lambda\upsilon}f_{\beta\gamma}+R_{\alpha\mu}f_{\upsilon\beta}-R_{\alpha\upsilon}f_{\mu\beta}-2[f_{\mu\alpha},f_{\upsilon\beta}]-[a_{\alpha\|\beta},f_{\mu\upsilon}]) \tag{4}$$

证　由(2)，有

$$\frac{\partial f_{\mu\upsilon}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial A_{\upsilon}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{\upsilon}}\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial t}\right)+\left[\frac{\partial A_{\mu}}{\partial t},A_{\upsilon}\right]+\left[A_{\mu},\frac{\partial A_{\upsilon}}{\partial t}\right]=\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\upsilon\|\mu}-\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\mu\|\upsilon}$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial t}=d_A\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \tag{5}$$

代入联络的演化方程(1)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{\mu\upsilon}}{\partial t}&=(d_A^*F_A+d_Ad_A^*a)_{\mu\|\upsilon}-(d_A^*F_A+d_Ad_A^*a)_{\upsilon\|\mu}\\&=((d_A^*F_A)_{\mu\|\upsilon}-(d_A^*F_A)_{\upsilon\|\mu})+((d_Ad_A^*a)_{\mu\|\upsilon}-(d_Ad_A^*a)_{\upsilon\|\mu})\end{aligned} \tag{6}$$

(6)式右端第一项为纯 Yang-Mills 热流下曲率的演化式. 应用 Ricci 恒等式和 Bianchi 恒等式，可得

$$\begin{aligned}(d_A^*F_A)_{\mu\|\upsilon}-(d_A^*F_A)_{\upsilon\|\mu}&=-g^{\alpha\beta}(f_{\alpha\mu\|\beta\upsilon}-f_{\alpha\upsilon\|\beta\mu})\\&=g^{\alpha\beta}(f_{\mu\alpha\|\upsilon\beta}+R^{\lambda}_{\mu\beta\upsilon}f_{\lambda\alpha}+R^{\lambda}_{\alpha\beta\upsilon}f_{\mu\lambda}+[f_{\mu\alpha},f_{\beta\upsilon}]-f_{\upsilon\alpha\|\beta\mu})\\&=g^{\alpha\beta}(f_{\mu\upsilon\|\alpha\beta}+f_{\upsilon\alpha\|\mu\beta}-f_{\upsilon\alpha\|\beta\mu}+R^{\lambda}_{\mu\beta\upsilon}f_{\lambda\alpha}+R^{\lambda}_{\alpha\beta\upsilon}f_{\mu\lambda}+[f_{\mu\alpha},f_{\beta\upsilon}])\\&=g^{\alpha\beta}(f_{\mu\upsilon\|\alpha\beta}+2g^{\lambda\gamma}R_{\alpha\mu\lambda\upsilon}f_{\beta\gamma}+R_{\alpha\mu}f_{\beta\gamma}+R_{\alpha\mu}f_{\upsilon\beta}-R_{\alpha\upsilon}f_{\mu\beta}-2[f_{\mu\alpha},f_{\upsilon\beta}])\end{aligned} \tag{7}$$

对(6)式右端第二项应用 Ricci 恒等式可得

$$\begin{aligned}(d_Ad_A^*a)_{\mu\|\upsilon}-(d_Ad_A^*a)_{\upsilon\|\mu}&=(d_A^*a)_{\|\mu\upsilon}-(d_A^*a)_{\|\upsilon\mu}\\&=[d_A^*a,f_{\mu\upsilon}]=-g^{\alpha\beta}[a_{\alpha\|\beta},f_{\mu\upsilon}]\end{aligned} \tag{8}$$

将(7),(8)两式代回前面的计算，即可得曲率的演化方程.

我们用记号 $P\# Q$ 表示这样一种张量，其分量能够表示成对张量 P 和 Q 的分量的乘积(实数域上的乘积或李代数的乘积)中的某些指标进行缩并后的线性组合，于是曲率的演化方程可简记为

$$\frac{\partial F_A}{\partial t}=-\nabla_A^*\nabla_AF_A+Rm\# F_A+F_A\# F_A+[d_A^*a,F_A]$$

为了推导出曲率的 k 阶共变导数 $\nabla_A^kF_A$ 的演化方程，我们需要下面两个简单而有用的引理.

引理 1　对任意整数 $k\geqslant 0$，都有

$$-\nabla_A\nabla_A^*\nabla_A\nabla_A^kF_A=-\nabla_A^*\nabla_A\nabla_A^{k+1}F_A+\sum_{i+j=k+1}(\nabla^iRm\#\nabla_A^jF_A+\nabla_A^iF_A\#\nabla_A^jF_A) \tag{9}$$

引理 2　对任意整数 $k\geqslant 1$，都有

$$\frac{\partial f_{\mu\upsilon\|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_{\mu\upsilon\|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}}}{\partial t}\right)_{\|\alpha_k}+\left[\frac{\partial A_{\alpha_k}}{\partial t},f_{\mu\upsilon\|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}}\right] \tag{10}$$

我们定义取值在李代数的 k 阶协变张量 P 和 l 阶协变张量 Q 的张量积 $P\otimes Q$ 为一个取值在李代数的 $k+l$ 阶协变张量

$$P\otimes Q=C_{st}^{a}P^{s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}Q^{t}_{\upsilon_1\upsilon_2\cdots\upsilon_l}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_k}\otimes dx^{\upsilon_1}\otimes dx^{\upsilon_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\upsilon_l}X_a$$

其中 C_{st}^{a} 是李群 G 的对应于基$\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$的结构常数，则(10)可简记为

$$\frac{\partial\nabla_A^kF_A}{\partial t}=\nabla_A\left(\frac{\partial\nabla_A^{k-1}F_A}{\partial t}\right)+\frac{\partial A}{\partial t}\otimes\nabla_A^{k-1}F_A \tag{11}$$

定理 2　曲率的 k 阶共变导数 $\nabla_A^kF_A$ 满足演化方程

$$\frac{\partial \nabla_A^k F_A}{\partial t} = - \nabla_A^* \nabla_A \nabla_A^k F_A + \sum_{i+j=k} (\nabla^i Rm \# \nabla_A^j F_A + \nabla_A^i F_A \# \nabla_A^j F_A) + d_A^* a \otimes \nabla_A^k F_A \tag{12}$$

证 对 k 用归纳法. 当 $k=0$ 时，此即曲率的演化方程(4). 应用引理1和引理2，将归纳假设代入(11)式右端第一项，将规范固定 Yang-Mills 热流的演化方程(1)代入第二项，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nabla_A^k F_A}{\partial t} &= \nabla_A \left(\frac{\partial \nabla_A^{k-1} F_A}{\partial t} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \otimes \nabla_A^{k-1} F_A \\
&= \nabla_A (- \nabla_A^* \nabla_A \nabla_A^{k-1} F_A + \sum_{i+j=k-1} (\nabla^i Rm \# \nabla_A^j F_A + \nabla_A^i F_A \# \nabla_A^j F_A) + \\
&\quad d_A^* a \otimes \nabla_A^{k-1} F_A) - (d_A^* F_A + d_A d_A^* a) \otimes \nabla_A^{k-1} F_A \\
&= - \nabla_A \nabla_A^* \nabla_A^k F_A + \sum_{i+j=k} (\nabla^i Rm \# \nabla_A^j F_A + \nabla_A^i F_A \# \nabla_A^j F_A) + \\
&\quad d_A d_A^* a \otimes \nabla_A^{k-1} F_A + d_A^* a \otimes \nabla_A^k F_A - (d_A^* F_A + d_A d_A^* a) \otimes \nabla_A^{k-1} F_A \\
&= - \nabla_A \nabla_A^* \nabla_A^k F_A + \sum_{i+j=k} (\nabla^i Rm \# \nabla_A^j F_A + \nabla_A^i F_A \# \nabla_A^j F_A) + d_A^* a \otimes \nabla_A^k F_A
\end{aligned}$$

再将(9)式代入，定理即可得证.

2 Yang-Mills 泛函的演化与能量不等式

一般地，规范固定 Yang-Mills 热流不一定是某个泛函的负梯度流，但我们仍可将 Yang-Mills 泛函

$$\mathrm{YM}(A) = \frac{1}{2} \| F_A \|^2$$

视为其所对应的能量. 从而可由对能量的估计，了解和掌握规范固定 Yang-Mills 热流的演化规律. 为了得到规范固定 Yang-Mills 热流下的能量不等式，我们首先推导出 Yang-Mills 泛函 YM(A)满足的演化方程.

引理 3 设 A_t 为规范固定 Yang-Mills 热流(1)的正则解，则

$$\frac{d}{dt} \mathrm{YM}(A) = - \| d_A^* F_A \|^2 \tag{13}$$

证 由联络与曲率的演化关系式(5)，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathrm{YM}(A) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| F_A \|^2 = \langle F_A, \frac{\partial F_A}{\partial t} \rangle \\
&= \langle F_A, d_A \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \rangle = \langle d_A^* F_A, \frac{\partial A}{\partial t} \rangle \\
&= \langle d_A^* F_A, - (d_A^* F_A + d_A d_A^* a) \rangle \\
&= - \| d_A^* F_A \|^2 - \langle d_A^* F_A, d_A d_A^* a \rangle
\end{aligned} \tag{14}$$

由 Ricci 恒等式有，$d_A d_A d_A^* a = [d_A^* a, F_A]$. 根据内积的伴随不变性，我们可证(14)式右端第二项为零，即有

$$\begin{aligned}
\langle d_A^* F_A, d_A d_A^* a \rangle &= \langle F_A, d_A d_A d_A^* a \rangle = \langle F_A, [d_A^* a, F_A] \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_M G_{ab} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} f_{\mu\nu}^a C_{pq}^b (d_A^* a)^p f_{\alpha\beta}^q \mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{2} \int_M G_{pb} (d_A^* a)^p g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} C_{qa}^b f_{\mu\nu}^a f_{\alpha\beta}^q \mathrm{d}V = 0
\end{aligned}$$

由引理3可知，在规范固定 Yang-Mills 热流下，Yang-Mills 泛函随时间 t 的增加而递减. 对 Yang-Mills 泛函演化式(13)的两端从0到 t 积分，可得相应的能量不等式.

定理 3 设 A_t 是规范固定 Yang-Mills 热流(1)的正则解，$0 \leqslant t < T \leqslant \infty$，且

$$\int_0^t \left(\int_M | F_A |^2 dV \right) \mathrm{d}t + \mathrm{YM}(A_t) = \mathrm{YM}(A_0)$$

特别地，$\mathrm{YM}(A_t) \leqslant \mathrm{YM}(A_0)$，并且如果 $T = \infty$，则

$$\int_0^\infty \left(\int_M |F_A|^2 \mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t < \infty$$

3 规范固定 Yang-Mills 热流的 Bochner 估计

定理 4　设 A_t 是规范固定 Yang-Mills 热流(1)的正则解，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|F_A|^2+2|\nabla_A F_A|^2 \leqslant C(|F_A|+|Rm|)|F_A|^2 \tag{15}$$

其中 $|Rm|$ 是度量 g 的黎曼曲率张量的范数，Δ 是 g 的拉普拉斯算子，常数 C 只与 M 的几何有关.

证　根据曲率的演化方程(4)，我们可得到能量密度 $|F_A|^2$ 的演化方程

$$\frac{\partial |F_A|^2}{\partial \tau}=2\left(F_A,\frac{\partial F_A}{\partial t}\right)=2(F_A,-\nabla_A^*\nabla_A F_A+Rm\#F_A+F_A\#F_A+[d_A^*a,F_A]) \tag{16}$$

根据内积的伴随不变性，(16)式右端最后一项为

$$2(F_A,[d_A^*a,F_A])=G_{ab}g^{\mu\alpha}g^{\upsilon\beta}f_{\mu\upsilon}^a C_{pq}^b(d_A^*a)^p f_{\alpha\beta}^q=G_{pb}(d_A^*a)^p g^{\mu\alpha}g^{\upsilon\beta}C_{qa}^b f_{\mu\upsilon}^a f_{\alpha\beta}^q=0$$

应用 Weitzenböck 公式，有

$$-\Delta|F_A|^2=2(F_A,\nabla_A^*\nabla_A F_A)-2|\nabla_A F_A|^2$$

从而可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|F_A|^2+2|\nabla_A F_A|^2=2(F_A,Rm\#F_A+F_A\#F_A)$$

由 Schwartz 不等式即可得所证的 Bochner 估计式(15).

类似地，我们可归纳地得到曲率高阶导数的 Bochner 估计.

定理 5　设 A_t 是(1) 的正则解. 若对所有的 $0\leqslant p<k$ $(k\geqslant 1)$，都有 $|\nabla_A^p F_A|<C_p$，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\nabla_A^k F_A|^2+2|\nabla_A^{k+1}F_A|^2 \leqslant C(|\nabla_A^k F_A|+1)|\nabla_A^k F_A| \tag{17}$$

证　代入曲率高阶导数 $|\nabla_A^k F_A|$ 的演化方程(12)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial|\nabla_A^k F_A|^2}{\partial t}\\&=2\left(\nabla_A^k F_A,\frac{\partial\nabla_A^k F_A}{\partial t}\right)\\&=2\left(\nabla_A^k F_A,-\nabla_A^*\nabla_A\nabla_A^k F_A+\sum_{i+j=k}(\nabla^i Rm\#\nabla_A^j F_A+\nabla_A^i F_A\#\nabla_A^j F_A)+d_A^*a\otimes\nabla_A^k F_A\right)\end{aligned} \tag{18}$$

根据内积的伴随不变性，(18)式右端最后一项为

$$\begin{aligned}&2(\nabla_A^k F_A,d_A^*a\otimes\nabla_A^k F_A)\\&=2G_{ab}C_{pq}^b((\nabla_A^k F_A)^a,(\nabla_A^k F_A)^q)(d_A^*a)^p\\&=2G_{pb}C_{qa}^b((\nabla_A^k F_A)^a,(\nabla_A^k F_A)^q)(d_A^*a)^p=0\end{aligned}$$

应用 Weitzenböck 公式，可得

$$-\Delta|\nabla_A^k F_A|^2=2(\nabla_A^k F_A,\nabla_A^*\nabla_A F_A)-2|\nabla_A^{k+1}F_A|^2$$

从而，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\nabla_A^k F_A|^2=-2|\nabla_A^{k+1}F_A|^2+2\left(\nabla_A^k F_A,\sum_{i+j=k}(\nabla^i Rm\#\nabla_A^j F_A+\nabla_A^i F_A\#\nabla_A^j F_A)\right)$$

由于 M 是紧致黎曼流形，根据 Schwartz 不等式，即得所证的估计式(17).

推论 1　设 A_t 是(1) 的正则解. 若对所有的 $0\leqslant p<k$ $(k\geqslant 1)$ 都有 $|\nabla_A^p F_A|<C_p$，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\nabla_A^k F_A|\leqslant C(|\nabla_A^k F_A|+1)$$

证　根据关于拉普拉斯算子的公式[4]

$$\Delta(f\varphi) = f\Delta\varphi + 2\nabla^i f\nabla_i\varphi + \Delta f\varphi$$

其中 f 是 M 上的函数，φ 是 M 上的形式，我们有

$$\Delta |\nabla_A^k F_A|^2 = 2|\nabla_A^k F_A|\Delta|\nabla_A^k F_A| + 2|\nabla_A^k F_A|^2 \tag{19}$$

将(19)式代入定理5所述的 Bochner 估计式(17)，即可完成证明.

参考文献:

[1] Donaldson S K. Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles [J]. Proc Lond Math Soc, 1985, 50(3): 1－26.

[2] Deturck D M. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors [J]. J Diff Geom, 1983, 18: 157－162.

[3] Chen Y M, Shen C L. Monotonicity formula and small action regularity for Yang-Mills flows in higher dimensions [J]. Calc Var, 1994, 2: 389－403.

[4] De Rham G. Differentiable Manifolds [M]. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984.

Energy Inequality and Bochner Type Estimates for the Gauge Fixing Yang-Mills Heat Flow

YAO Chun-qing

Dept. of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: By deriving the evolution of the curvature and its higher derivatives, the author gets an energy inequality and Bochner type estimates for the gauge fixing Yang-Mills heat flow, which are also the tools for further research on this flow.

Key words: gauge fixing; Yang-Mills heat flow; energy inequality; Bochner type estimate

责任编辑 覃吉康