文章编号：1000-5471(2007)03-0019-04

障碍带条件下非线性两点边值问题解的存在性[①]

姚晓斌

西北师范大学 数学与信息科学学院，兰州 730070

摘要：在障碍带条件下讨论了二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, x') & t \in [0, 1] \\ x(0) = A \\ x'(1) = B \end{cases}$$

解的存在性，其中 $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数.

关　键　词：存在性；边值问题；障碍带

中图分类号：**O175.8**　　　　**文献标识码**：**A**

非线性常微分方程边值问题是微分方程研究领域中一个十分重要而热门的研究课题，这些工作对存在性结果大部分都要求 f 在∞满足一定增长性限制[1,2]. 文献[3]运用 Leray-Schauder 原理在障碍带条件下研究了非线性边值问题：

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, x') & t \in [0, 1] \\ x(0) = A \\ x'(1) = B \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，并获得

定理 A　设 $f: [0,1] \times R^2 \longrightarrow R$ 连续. 假定存在常数 L_i $(i = 1,2,3,4)$，使得 $L_2 > L_1 \geqslant B$，$L_3 < L_4 \leqslant B$. 若 f 满足：

(H_1)　$f(t, x, p) \geqslant 0$，$(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times [L_1, L_2]$；

(H_2)　$f(t, x, p) \leqslant 0$，$(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times [L_3, L_4]$；

则边值问题(1)在 $C^2[0, 1]$中至少存在一个解.

从定理 A 的条件可以看出，f 对 p 是局部的，即 f 在 p 充分大的增长性限制条件下对解的存在性没有影响，因而突破了文献[1，2]中的结果对 f 在∞增长要求的限制.

在定理 A 的条件(H_1)和(H_2)中，f 的符号是在区间上给出的. 非常自然地，我们会问：当区间$[L_1, L_2]$，$[L_3, L_4]$分别退化为一个点的时候，即条件(H_1)，(H_2)变化为

(H_1')　$f(t, x, p) \geqslant 0$，$(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \{L^*\}$；

(H_2')　$f(t, x, p) \leqslant 0$，$(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \{L_*\}$

时，问题(1)的解是否仍然存在？本文将证明答案是肯定的.

记 $C[0, 1] = \{x \mid x(t)$ 在$[0, 1]$上连续$\}$，它在范数

$$\| x \|_0 = \max_{t \in [0, 1]} | x(t) |$$

下构成 Banach 空间；记 $C^k[0, 1] = \{x \mid x^{(k)}(t)$ 在$[0, 1]$上连续$\}$，它在范数

① 收稿日期：2006-05-29
作者简介：姚晓斌(1981-)，男，甘肃灵台人，硕士研究生，主要从事常微分方程的研究.

$$\| x \|_k = \max_{t\in[0,1]} \{ \| x \|_0, \| x' \|_0, \cdots, \| x^{(k)} \|_0 \}$$

下构成 Banach 空间，其中 $k=1,2$.

本文的主要结果如下：

定理 1 设 f：$[0, 1]\times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续. 假定存在常数 L_*,L^*，使得 $L_* < B < L^*$. 若 f 满足：

(H_1') $f(t, x, p) \geqslant 0$, $(t, x, p) \in [0, 1]\times \mathbb{R} \times \{L^*\}$;

(H_2') $f(t, x, p) \leqslant 0$, $(t, x, p) \in [0, 1]\times \mathbb{R} \times \{L_*\}$.

则边值问题(1) 在 $C^2[0, 1]$ 中至少存在一个解.

证 由 Tietze-Urysohn 引理，存在连续函数 ρ：$\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$，使得

$$\rho(L^*) = 1 \qquad \rho(L_*) = -1$$

对任一整数 $n \geqslant 1$，令

$$f_n(t, x, p) = f(t, x, p) + \frac{1}{n}\rho(p) \tag{2}$$

因 f 连续，故 $f_n(t, x, p)$ 连续. 现在考虑边值问题：

$$\begin{cases} x''(t) = f_n(t, x, x') \qquad t \in [0, 1] \\ x(0) = A \\ x'(1) = B \end{cases} \tag{3}$$

由(H_1'),(2) 及 ρ 的定义，有

$$f_n(t, x, L^*) = f(t, x, L^*) + \frac{1}{n}\rho(L^*) \geqslant \frac{1}{n} > 0$$

由连续函数保号性，存在 $L_{n,1}$,$L_{n,2}$，满足

$$B \leqslant L_{n,1} < L^* \leqslant L_{n,2}$$

使

$$f_n(t, x, p) > 0 \qquad (t, x, p) \in [0, 1]\times \mathbb{R} \times [L_{n,1}, L_{n,2}]$$

同理,存在 $L_{n,3}$,$L_{n,4}$，满足

$$L_{n,3} \leqslant L_* < L_{n,4} \leqslant B$$

使

$$f_n(t, x, p) < 0, \qquad (t, x, p) \in [0, 1]\times \mathbb{R} \times [L_{n,3}, L_{n,4}].$$

显然可以要求

$$[L_{n+1,1}, L_{n+1,2}] \subseteq [L_{n,1}, L_{n,2}] \tag{4}$$

及

$$[L_{n+1,3}, L_{n+1,4}] \subseteq [L_{n,3}, L_{n,4}] \tag{5}$$

由定理 A，问题(3) 在 $C^2[0, 1]$ 中有解 x_n，且 x_n 满足

$$L_{n,4} \leqslant x_n'(t) \leqslant L_{n,1} \tag{6}$$

结合(4),(5) 及(6)，我们有

$$L_{1,4} \leqslant x_n'(t) \leqslant L_{1,1}$$

进而存在 $M > 0$，使得

$$| x_n'(t) | \leqslant M \qquad t \in [0, 1] \tag{7}$$

另一方面，对每一个 $t \in [0, 1]$，存在 $d \in (0, t)$，使得

$$x_n(t) - x_n(0) = x_n'(d) \cdot t \tag{8}$$

由(7),(8) 得

$$| x_n(t) | \leqslant C \qquad t \in [0, 1] \tag{9}$$

其中 $C = | A | + M$. 由(7),(9) 及(2) 有

$$| f_n(t, x, p) | \leqslant \max_{t\in[0,1], |x|\leqslant C, |p|\leqslant M} | f(t, x, p) | + 1 = M_1$$

这表明：

$$|x''_n(t)| \leqslant M_1 \qquad t \in [0,1] \tag{10}$$

由(7),(9) 及(10) 可知

$$\| x_n \|_2 \leqslant M_2$$

其中 $M_2 = \max\{C, M, M_1\}$.

下证

(i) $\{x_n\}$ 有子列$\{x_{n_{j_k}}\}$ 满足：

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}} = \omega$$

(ii) ω 满足问题(1).

事实上，因为 $C^2[0,1] \circlearrowleft\circlearrowleft C^1[0,1] \circlearrowleft\circlearrowleft C[0,1]$. 若$\{x_n\}$ 在 $C^2[0,1]$ 中有界，则$\{x_n\}$ 是 $C[0,1]$ 中的相对紧集，进而存在$\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = w \in C[0,1]$$

又因为$\{x_{n_j}\}$ 有界及 $C^2[0,1] \circlearrowleft\circlearrowleft C^1[0,1]$，故存在$\{x_{n_{j_k}}\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_{j_k}} = \omega \tag{11}$$

且

$$\lim_{j\to\infty} x'_{n_{j_k}} = \omega' \tag{12}$$

显然有

$$\begin{cases} x''_{n_{j_k}}(t) = f_n(t, x_{n_{j_k}}(t), x'_{n_{j_k}}(t)) \qquad t \in [0,1] \\ x_{n_{j_k}}(0) = A \\ x'_{n_{j_k}}(1) = B \end{cases} \tag{13}$$

而问题(13) 等价于

$$x_{n_{j_k}}(t) = Bt + A - \int_0^1 H(t,s) f_n(s, x_{n_{j_k}}(s), x'_{n_{j_k}}(s))\mathrm{d}s \tag{14}$$

其中 $H(t,s)$ 是

$$\begin{cases} -x''(t) = 0 \qquad t \in [0,1] \\ x(0) = 0 \\ x'(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数，且

$$H(t,s) = \begin{cases} s, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

因 f_n 一致收敛于 f，且 $H(t,s) f_n(s, x_{n_{j_k}}(s), x'_{n_{j_k}}(s))$ 连续，故对(14) 两端取极限，有

$$\begin{aligned} \omega(t) &= Bt + A - \lim_{k\to\infty}\int_0^1 H(t,s) f_n(s, x_{n_{j_k}}(s), x'_{n_{j_k}}(s))\mathrm{d}s \\ &= Bt + A - \int_0^1 H(t,s) f(s, \omega(s), \omega'(s))\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{15}$$

由(15) 式不难推知 $\omega \in C^2[0,1]$，且 ω 满足问题(1).

同理可证下面对偶命题成立：

定理 2　设 $f: [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续. 假定存在常数 L_*, L^*，使得 $L_* < A < L^*$. 若 f 满足：

(H_1'')　$f(t,x,p) \leqslant 0$, $(t,x,p) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \{L^*\}$;

(H_2'')　$f(t,x,p) \geqslant 0$, $(t,x,p) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \{L_*\}$.

则边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t,x,x') \qquad t \in [0,1] \\ x'(0) = A \\ x(1) = B \end{cases}$$

在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解.

例 考虑二阶微分方程

$$x''(t)=(x'(t))^5-\frac{5}{2}(x'(t))^4+\frac{1}{2}(x'(t))^3+\frac{7}{4}(x'(t))^2-\frac{3}{16}x'(t)-\frac{9}{32} \qquad t\in[0,1]$$

在边值条件

$$x(0)=0 \qquad x'(1)=1$$

下的可解性.

显然，如果我们取 $L_*=-\frac{1}{2}$，$L^*=2$，以及 $B=1$，则

$$f(t,x,p)=p^5-\frac{5}{2}p^4+\frac{1}{2}p^3+\frac{7}{4}p^2-\frac{3}{16}p-\frac{9}{32}$$

满足定理1的所有条件，因此所考察的问题在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解.

参考文献：

[1] Erbe L H. Existence of solutions to boundary value problem for second order differential equations [J]. Nonlinear Analysis，1982，6：1155－1162.

[2] Sung N Ha. A nonlinear shooting method for two-point boundary value problems [J]. Computers and Mathematics with Applications，2001，42：1411－1420.

[3] Kelevedjiev P. Existence of solutions for two-point boundary value problems [J]. Nonlinear Analysis，1994，22：217－224.

[4] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题 [M]. 北京：科学出版社，2004.

[5] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.

Existence of Solutions for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problem under Barrier Strips Conditions

YAO Xiao-bin

College of Mathematics and Information Science，Northwest Normal University，Lanzhou Gansu 730070，China

Abstract：In this paper the author discussed the existence of solutions to a two-point boundary value problem for second order ordinary differential equations

$$\begin{cases} x''(t)=f(t,x,x') \qquad t\in[0,1] \\ x(0)=A \\ x'(1)=B \end{cases}$$

under barrier strips conditions，where $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ is continuous.

Key words：existence；boundary value problem；barrier strips

责任编辑 覃吉康