

适用于不同条件的多普勒效应公式^①

李崇虎

西南大学 物理科学与技术学院, 重庆 400715

摘要: 讨论了在几种不同条件下使用的多普勒效应公式, 并从波源和接收器同时运动的一般情形着手, 在满足不同的近似条件下, 得到了两种不同形式的, 普遍的, 机械波多普勒效应近似公式.

关键词: 多普勒效应; 频率; “高频”近似; “低速”近似

中图分类号: O313

文献标识码: A

当波的传播方向、波源及接收器速度三者不共线时, 多普勒效应的普遍公式^[1-3]是

$$f = f_0 \frac{u \pm v_2 \cos \beta}{u \pm v_1 \cos \alpha} \quad (1)$$

式中: f_0 是波源频率; f 是接收器收到的频率; u 是波在媒质中的传播速度; v_1, v_2 分别是波源及接收器速度; α, β 分别是 v_1, v_2 与接收器到波源的连线的夹角.

1 光波多普勒效应的近似公式

当(1)式中的 u 表示光速时, (1)式是光波的多普勒效应的普遍(近似)公式. 因为波的相位是坐标变换下的不变量, 而它又是时空四维矢量 (\vec{r}, ict) 与四维角波矢 $(\vec{k}, i\omega/c)$ 的点积, 所以通过四维角波矢的洛仑兹变换可以得到光波多普勒效应的严格公式^[3]. 然后, 在 $v_1 \ll u$ 及 $v_2 \ll u$ 的“低速”近似条件下, 严格公式过渡到非相对论的近似公式(1).

在使用(1)式时, 应该注意到, 在文献[3]的论证中, 连线 \overline{RS} 连结的是运动的接收器和波源处于同一时刻的位置.

2 机械波多普勒效应的近似公式(第一种形式)

对于机械波, (1)式也是一个近似公式. 不过, 因为时空四维矢量 (\vec{r}, ict) 的第 4 个分量中的 c 只能是光速, 所以, 不能通过把光速换成机械波速度的简单办法, 直接将光波的非相对论近似公式推广到机械波, 而应该用经典力学的方法另行推导.

2.1 波源运动, 接收器静止的情形

如图 1 所示, 发出固定频率 f_0 (周期 T_0) 的波源, 在过 o 点的直线上以不变的速率 v_1 运动. S 为波源在 $t=t$ 时刻的位置, S_1 为波源在 $t=t+T_0$ 时刻的位置. 设波源在 S 和 S_1 处分别发出两个相邻的波峰, 则接收器在 R 点收到这两个波峰的时间分别为 $t_1 = t + \frac{r}{u}$, $t_2 = t + T_0 + \frac{r'}{u}$ 于是, 接收器收到的周期为

$$T = t_2 - t_1 = T_0 + \frac{r' - r}{u} \quad (2)$$

① 收稿日期: 2006-02-17

作者简介: 李崇虎(1941-), 男, 湖南浏阳人, 副教授, 从事基础物理教学和研究.

在图 1 中可以看到 $r'^2 = r^2 + (v_1 T_0)^2 + 2rv_1 T_0 \cos\alpha$. 在 $v_1 T_0 \ll r$ 的条件下, 由二项式展开得

$$r' = r \left[1 + \frac{v_1 T_0 (v_1 T_0 + 2r \cos\alpha)}{2r^2} \right] \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式得

$$T = T_0 \left[1 + \frac{v_1}{2ru} (v_1 T_0 + 2r \cos\alpha) \right] \quad (4)$$

在已有的 $v_1 T_0 \ll r$ 条件下, 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 只要波源的运动速率 v_1 与声波的传播速度 u 大小相当, 由(4)式可以得到 $T \approx T_0$, 即没有横向多普勒效应; 在 $\alpha \neq \pi/2$ 时, 一般 $2r \cos\alpha \gg v_1 T_0$, 由(4)式可以得到接收器收到的频率

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v_1 \cos\alpha}{u} \right)^{-1} \quad (5)$$

2.2 接收器运动, 波源静止的情形

如图 2 所示, 发出固定频率 f_0 的波源在 S 点静止不动, 而接收器在过 O 点且垂直于 OS 的直线上以不变的速率 v_2 运动. 设波源在 $t=t$ 时刻和 $t=t+T_0$ 时刻分别发出两个相邻的波峰, 而接收器在 R 及 R_1 处收到这两个波峰的时间分别为 $t_1 = t + \frac{r}{u}$, $t_2 = t + T_0 + \frac{r'}{u}$. 接收器收到的周期 $T = t_2 - t_1$ 仍由(2)式给出.

在图 2 中可看到 $r'^2 = r^2 + (v_2 T)^2 + 2rv_2 T \cos\beta$. 在 $v_2 T \ll r$ 的条件下, 由二项式展开得

$$r' = r \left[1 + \frac{v_2 T (v_2 T + 2r \cos\beta)}{2r^2} \right] \quad (3')$$

将(3')式代入(2)式得

$$T = T_0 \left[1 - \frac{v_2 (v_2 T + 2r \cos\beta)}{2ur} \right]^{-1} \quad (4')$$

在已有的 $v_2 T \ll r$ 条件下, 当 $\beta = \pi/2$ 时, 只要接收器的运动速率 v_2 与声波的传播速度 u 大小相当, 由(4')式可以得到 $T \approx T_0$, 即没有横向多普勒效应; 在 $\beta \neq \pi/2$ 时, 一般 $2r \cos\beta \gg v_2 T$, 由(4')式可得到 $T = T_0 \left(1 - \frac{v_2 \cos\beta}{u} \right)^{-1}$, 及接收器收到的频率

$$f = f_0 \left(1 - \frac{v_2 \cos\beta}{u} \right) \quad (5')$$

2.3 波源和接收器同时运动的情形(多普勒效应的普遍公式)

如图 3 所示, 波源和接收器分别以速率 v_1 及速率 v_2 作匀速直线运动, 两条直线交于 O 点, 夹角为 θ . 在 $t=t$ 时刻, 波源的位置在 S 点(到 O 点的距离为 a), 接收器的位置在 R 点(到 O 点的距离为 b). 此两点的连线 $\overline{RS} = r_0$, 它与波源和接收器运动方向的夹角分别为 α 和 β' ($\beta = \pi - \beta'$).

波源在 $t=t$ 时刻, 在 S 点发出一个波峰, 接收器在 $t_1 = t + \frac{r}{u}$ 时刻于位置 R_1 点收到 ($\overline{SR_1} = r$); 波源在 $t=t+T_0$ 时刻, 在 S_1 点发出另一个相邻的波峰 ($\overline{SS_1} = v_1 T_0$), 接收器在 $t_2 = t + T_0 + \frac{r'}{u}$ 时刻于位置 R_2 点收到 ($\overline{S_1 R_2} = r'$, $\overline{R_1 R_2} = v_2 T$). 显然, 接收器收到的周期 $T = t_2 - t_1$ 的表达式与(2)式相同.

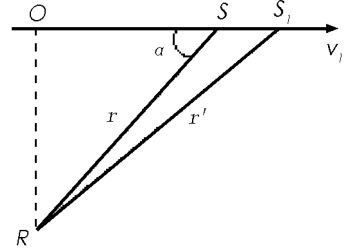


图 1 波源运动的情形
Fig. 1 Moving Wave Source

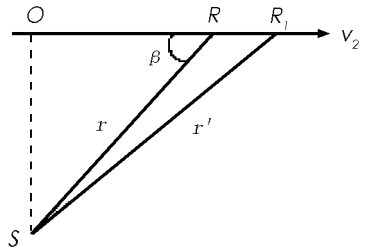


图 2 接收器运动的情形
Fig. 2 Moving Receiver

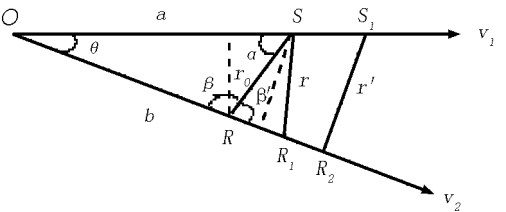


图 3 波源和接收器同时运动的情形
Fig. 3 Moving Wave Source and Moving Receiver

根据余弦定理 $r^2 = r_0^2 + (\overline{RR_1})^2 + 2r_0(\overline{RR_1})\cos\beta$. 将 $\overline{RR_1} = v_2(t_1 - t) = \frac{v_2 r}{u}$ (图 3) 代入, 并解二次方程得

$$r\left(1 - \frac{v_2^2}{u^2}\right) = r_0\left(\frac{v_2}{u}\cos\beta + \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{u^2}\sin^2\beta}\right) \tag{6}$$

在 $v_2 \ll u$ 的条件下, 略去二级小量, 由(6)式得 $r = r_0\left(1 + \frac{v_2}{u}\cos\beta\right)$ 或者

$$r_0 = r\left(1 + \frac{v_2}{u}\cos\beta\right)^{-1} \approx r\left(1 - \frac{v_2}{u}\cos\beta\right) \tag{7}$$

又由余弦定理得 $r'^2 = (a + \overline{SS_1})^2 + (b + \overline{RR_2})^2 - 2(a + \overline{SS_1})(b + \overline{RR_2})\cos\theta$. 将各线段的表达式代入得

$$\begin{aligned} r'^2 = r^2 + 2v_1 T_0(a - b\cos\theta) - \frac{2v_1 v_2 r T_0}{u}\cos\theta \\ + 2v_2 T(b - a\cos\theta) + \frac{2v_2^2 r T}{u} \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $r^2 = a^2 + (b + \overline{RR_1})^2 - 2a(b + \overline{RR_1})\cos\theta$. 由于受到前面(5)式及(5')式推导过程的启发, 在得到(8)式的过程中, 用所谓的“高频”条件($v_1 T_0 \ll r$ 及 $v_2 T \ll r$)略去了 $v_1 T_0$ 和 $v_2 T$ 的平方项, 以及它们的乘积项.

将 $a - b\cos\theta = r_0 \cos\alpha$ 及 $b - a\cos\theta = r_0 \cos(\pi - \beta)$ (图 3) 代入(8)式得

$$r' = r\left(1 + \frac{2v_1 T_0 r_0 \cos\alpha}{r^2} - \frac{2v_1 v_2 T_0 \cos\theta}{ru} - \frac{2v_2 T r_0 \cos\beta}{r^2} + \frac{2v_2^2 T}{ru}\right)^{1/2} \tag{9}$$

再在 $v_1 \ll u$ 及 $v_2 \ll u$ 的条件下, 对(9)式作二项式展开后, 代入(2)式得

$$T\left(1 + \frac{v_2 r_0 \cos\beta}{ru} + \frac{v_2^2}{u^2}\right) = T_0\left(1 + \frac{v_1 r_0 \cos\alpha}{ru} - \frac{v_1 v_2 \cos\theta}{u^2}\right) \tag{10}$$

将(7)式给出的 r_0 代入上式, 略去二级小量得

$$T = T_0 \frac{1 + v_1 \cos\alpha/u}{1 + v_2 \cos\beta/u}$$

或者

$$f = f_0 \frac{u + v_2 \cos\beta}{u + v_1 \cos\alpha} \tag{11}$$

考虑到波源和接收器各种不同运动方向的情形, 速度取不同的正、负值, (11)式就有了最普遍的形式, 即公式(1).

3 机械波多普勒效应公式(第二种形式)

3.1 特定运动条件下, 机械波多普勒效应的严格公式

当波源和接收器可以看作是从同一点同时出发时, 图 3 中的线段 $\overline{R_2 S_1}$ 平行于线段 $\overline{R_1 S}$ (速度 v_1 及 v_2 与 $\overline{R_1 S}$ 的夹角分别为 ϕ 及 ψ). 从图 4 中可以看到 $r' - r = v_1 T_0 \cos\phi + v_2 T \cos\psi$. 于是, 由(2)式得

$$T = T_0 + \frac{v_1 T_0 \cos\phi + v_2 T \cos\psi}{u}$$

以及

$$f = f_0 \frac{u - v_2 \cos\psi}{u + v_1 \cos\phi} \tag{12}$$

(12)式是在波源和接收器处于特定运动条件下的一个严格公式. 它的成立既不需要“高频”条件, 也不需要“低速”条件.

3.2 机械波普遍的多普勒效应近似公式

(12)式使我们想到, 能否用角度 ϕ, ψ 替代(1)式中的角度 $\alpha,$

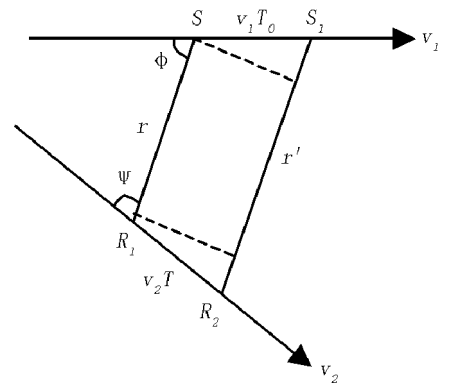


图 4 线段 $\overline{R_2 S_1}$ 平行于线段 $\overline{R_1 S}$ 的情形
Fig. 4 Line Segment $\overline{R_2 S_1}$ is Parallel to $\overline{R_1 S}$

β , 从而得到另一个形式不同的, 普遍的多普勒效应近似公式.

参照图 3, 认为图 4 中的两条直线也交于 O 点, 令 $b' = b + \overline{RR_1}$, 余弦定理给出 $r^2 = a^2 + b'^2 - 2ab' \cos\theta$,

$$r'^2 = (a + v_1 T_0)^2 + (b' + v_2 T)^2 - 2(a + v_1 T_0)(b' + v_2 T) \cos\theta$$

在 $v_1 T_0 \ll r$ 及 $v_2 T \ll r$ 的条件下, 略去了 $v_1 T_0$ 和 $v_2 T$ 的平方项, 以及它们的乘积项, 可以得到(参见 2. 3 的证明过程)

$$r' = r \left[1 + \frac{2}{r} (v_1 T_0 \cos\phi + v_2 T \cos\psi) \right]^{1/2} \approx r + v_1 T_0 \cos\phi + v_2 T \cos\psi$$

将其代入(2)式, 得到与(12)式一样的公式.

4 结 论

关于公式的适用条件:

(1) 对于光波, 公式(1)是在 $v_1 \ll u$ 及 $v_2 \ll u$ (相对于光速的)“低速”运动条件下的, 普遍的多普勒效应近似公式;

(2) 对于机械波, 在前面, (5)式及(5')式是在接收器不动, 或波源不动条件下, 公式(1)的两种既特殊又简单的形式. 在那里, 我们取近似时, 用了所谓的“高频”条件:

$$v_1 T_0 \ll r \text{ 及 } v_2 T \ll r$$

(3) 对于机械波, (11)式是在同时满足“高频”条件和(相对于机械波速的)“低速”运动条件下的, 普遍的多普勒效应近似公式;

(4) 对于机械波, (12)式是在“高频”条件的, 普遍的多普勒效应近似公式;

(5) 对于机械波, 当波源与接收器以上文所述的特殊方式运动时, 公式(12)也是(在经典力学范围内的)多普勒效应的严格公式.

总之, 用于机械波的, 普遍的多普勒效应近似公式有两种形式: (11)式与光波的多普勒效应近似公式形式相同, 使用条件除了“低速”条件, 还多了一个“高频”条件; (12)式与光波的多普勒效应近似公式形式不同, 使用条件也不同. 不过, 因为(12)式中的角度 ϕ, ψ 与待求量 T 有关, 增加了求解难度, 在讨论多普勒效应时, 宁愿使用(11)式.

参考文献:

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995: 318 - 319.
- [2] John R Taylor. Classical Mechanics[M]. America: University Science Books, 2005.
- [3] 路峻岭, 汪荣宝. 多普勒效应公式的简便推导[J]. 大学物理, 2005, 8: 25 - 27.

The General Doppler Formula Being Fit for Several Distinct Conditions

LI Chong-hu

School of Physics Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Doppler Formulae being fit for several distinct conditions are discussed, and setting start with a general condition in which wave source and receiver are moving, two types of general Doppler approximate formula are deduced within the different restrictions.

Key words: Doppler effect; frequency; “high frequency” approximation; “low speed” approximation