第 32 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2007 年 2 月
Vol. 32 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science) Feb. 2007

文章编号:1000-5471(2007)01-0154-04

中学数学问题的代数表征与几何表征①

姚元锦[1], 张 辅[2], 孟世才[3]

1. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715;2. 华东师范大学 数学系,上海 200062;
3. 重庆教育学院 数学系,重庆 400067

摘要: 从数学学科属性的角度对问题表征形式进行研究,界定了中学数学问题的代数表征和几何表征,并结合具体的教材和教学探讨了代数表征与几何表征相结合在中学数学问题解决中的意义和作用. 认为代数表征与几何表征相结合的教学有助于增强学生认识问题的全息性,促进学生形成对数学的整体认识,形成良序知识结构,有利于学生解决问题的策略多样化和能力的提高.

关 键 词: 数学问题解决;代数表征;几何表征;问题表征

中图分类号: G632;G633.6 **文献标识码:** A

1 问题提出

问题表征是指问题解决者通过审题,认识和了解问题的结构;通过联想,激活头脑中与之相关的知识和经验,将外部信息转化为内部信息,形成问题空间,包括明确的给定条件、目标和允许的操作. 国内外的相关研究都表明,数学问题表征是数学问题解决的核心和关键,对问题做什么样的表征,这种表征是否适宜,直接影响到问题解决的难易、快慢和成败[1].

文献[2]的研究表明,学生解答数学问题产生错误的原因主要来自对问题结构的错误表征,而不是计算方面的因素. 文献[3]的研究表明,对问题的不同表征会产生不同的问题解决效果. 文献[4]就一道应用题对 34 名学生进行测试,结果表明:① 正确的问题表征是解决问题的必要前提,在错误的或者不完整的问题空间中进行搜索不可能得到问题的正确解;② 问题表征是对问题信息的提取和理解的过程,问题规则在问题表征中起重要作用;③ 在问题表征过程中,导致建构出错误或者不完整的问题空间的因素包括:信息遗漏、信息误解、隐喻干扰(问题信息中潜在的歧义性使被试困惑或误导被试的解题思路)等. 文献[5]对小学生表征数学应用题的研究表明,成功的解题者和不成功的解题者的最主要区别就在于表征数学应用题的方式不同.

鉴于问题表征对数学问题解决有举足轻重的作用,要让中学生成功进行数学问题解决的学习,首先要培养他们的数学问题表征能力. 要培养学生的数学问题表征能力,我们必须研究数学问题的表征形式、表征方法和表征策略等,在此基础上才能引导学生对数学问题进行正确的表征,进而成功地解决数学问题. 在所有的这些因素中,问题的表征形式毫无疑问又是最为基础的,因此本文从这一角度进行探讨.

已有的研究成果认为,问题的表征形式大体上可以分成两种. 一种是内在表征,即问题在人脑中的思考. 另一种是外在表征,即将问题以文字、数式、图表、模型和实验等具体的东西表示出来. 两者相互关联,内在表征是外在表征的基础,外在表征是内在表征的具体化和外显化. 人们的工作记忆容量是有限的,良好的外在表征可以大大减轻工作记忆的负担,有利于问题的解决.

---

① 收稿日期:2005-12-08
作者简介:姚元锦(1976-),男,侗族,贵州铜仁人,助教,硕士研究生,主要从事数学教育的研究.

这些研究是从心理学的角度对问题的表征形式进行研究，以研究问题表征的心理机制为出发点，所获得的结果对于实际解决问题时表征问题具有积极的意义．然而这些研究对问题的学科特性考虑不够，虽然提供了一些通式的结果，但是在进行具体的问题解决时这些研究结果往往具有较强的局限性．因此我们还应该从问题的学科属性进行问题表征形式的研究．数学问题本身具有数学学科的特性，包括数学研究的对象、思想、方法和特征等．这是研究数学问题表征的基础．数学大师陈省身说过"数学研究的对象不外乎两种：数和形"．虽然数学经历了数千年的发展，现代数学分支越来越细，但是数和形作为数学研究的主要对象是从来都没有改变的，特别是初等数学常常被认为就是由代数和几何两部分组成，相应的也有了代数内容与几何内容、代数思想与几何思想、代数方法与几何方法、代数特征与几何特征等的对应．从这一角度进行思考，我们认为数学问题表征形式可以不失一般性地分为代数表征和几何表征两种．

2　代数表征与几何表征的内涵

代数表征是指从代数的角度用数、式、方程和函数等代数工具对数学概念与问题等进行表征．如集合 A 与 B 的交集可以根据交集的定义得到 $A\cap B$ 的代数表征：$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，由此我们容易看出 $A\cap B$ 的元素的代数属性，获取 $A\cap B$ 的内在特征．又如直线的方程即是直线的代数表征，这种表征形式让我们容易看出两个变量 x 和 y 的对应关系．代数表征抽象程度高，要求问题解决者具备较好的的相关知识基础，它能有效地促进问题解决者的抽象逻辑思维能力的提高．

几何表征是指从几何的角度用图形等几何工具对问题进行表征．如前述 $A\cap B$ 也可以用文氏图进行表征，从该图我们能迅速看出 A，B 和 $A\cap B$ 三个集合的直觉关系，获取 $A\cap B$ 的外在特征；同样直线也可以用相应的图形表征，从图形我们容易看出直线在坐标系中的位置、截距和方向等几何特性．几何表征直观形象，能给问题解决者提供问题在现实生活中的模型，能为问题解决者提供更多的直觉信息，有效地促进问题解决者的直观形象思维能力．

数学问题的代数表征与几何标准也并非相互独立的，而是相互关联、相辅相成的．二者并非数学问题表征的不同部分，而只是从不同视角所看到的同一问题的不同外在表象．一般说来，初等数学中的问题如果存在一种代数表征，也就存在一种相应的几何表征，反之亦然．

3　代数表征与几何表征相结合在中学数学问题解决中的意义

代数表征和几何表征虽然各有特点，也分别有一定的不足．单一的代数表征虽然有助于学生进行逻辑推理，但是对学生数学直觉的帮助不大；单一的几何表征虽然具体直观，但是难以促进学生的抽象思维能力和思维的逻辑严谨性．因此，二者的有机结合对中学数学问题解决教学实践具有非常积极的意义，而不能过于偏重于其中某一种方式．

3.1　增强学生认识问题的全息性

如前所述，过于偏重某一种表征形式一般只能让学生获得与问题有关的部分信息，不利于学生全面地认识问题，进而也会阻碍学生数学问题解决能力的提高．反之，代数表征与几何表征相结合则可以有效地避免这种缺陷，使学生获得与问题相关的全面信息，从而成功地解决问题．

如探索函数 $y=A\sin(\varphi x+B)$ 的性质，学生如果只对问题进行代数表征，不借助几何图形，只根据相关定义和 $y=\sin x$ 的已有知识，虽然可以求出函数的单调性、周期性和对称性等的代数表示，但是这些代数的结果对学生来说很可能是枯燥乏味的，因为这里的结果只揭示了与函数 $y=A\sin(\varphi x+B)$ 相关的一些静态的数量关系，学生只能获得凝滞的代数信息．在问题解决中只运用代数表征很容易使学生形成思维定势，解决问题的思路受到较大程度的局限．如果学生运用几何表征，从函数 $y=A\sin(\varphi x+B)$ 的图象出发去分析相应的性质，也能发现相应的结果；如果学生还将函数 $y=\sin x$ 和 $y=A\sin(\varphi x+B)$ 的图象进行对比，则能更清楚地看到参数 A，φ，B 的变化对函数图象的影响趋势．然而如果只通过问题的几何表征进行探索，也会使学生对图形产生过度的依赖性，并且在以后碰到类似问题时还得通过画图来分析，降低解题的效率，而且还容易出错．因为这里通过几何表征解决问题，学生可以发现函数 $y=A\sin(\varphi x+B)$ 的图象是随参数 A，φ，B 而变化的动态信息．这种信息是模糊的、不严谨的，其内在严格的数学规律究竟是什么

还并未解决. 如果让学生将两种表征形式结合起来进行思考, 则既可以获得静态的数量关系信息, 又可以获得动态的图象变化信息, 使得学生对问题信息的提取具有全息性, 能正确地认清问题的内涵和外延, 寻找到正确的解决策略和完美的结果.

3.2 促进学生形成对数学的整体认识

长期以来, 我国中学数学教材编写都将代数内容与几何内容独立成册, 初中分别是代数和平面几何, 高中则分别是代数、立体几何和平面解析几何. 相应的数学教学也通常按照这样的体系进行. 这样的教材编排与教学必然使学生在学习代数部分内容的时候逐渐遗忘几何的知识、方法和思想, 而在学习几何部分内容的时候则会将代数的知识、方法和思想遗忘. 这样一来, 学生往往习惯从某一个角度出发去思考数学问题, 形成对数学的片面认识.

在问题解决的教学中加强对学生用代数表征和几何表征相结合的方式对问题进行表征, 可以有效地弥补这种教材体例上的不足和教学实践中代数与几何的脱节现象.

例如要证明恒等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$. 这一等式曾出现在原人教版高中数学课本等比数列内容的练习中. 由于是出现在代数课本中, 学生很容易想到一些相关的代数表征方式. 例如学生可能会观察到等式左边是一个等比数列的前 n 项和, 想到利用等比数列的求和公式; 也可能想到利用错位相减法, 将等式左边乘以 2 再和原等式左边相减; 还可能会想到可以将等式左边进行裂项相消……毫无疑问, 这些都是行之有效的代数表征形式. 作者在 2001 年曾要求两个班 92 名高中二年级学生用非代数的方法表示或证明这一等式, 结果在 10 分钟内竟然有 37 名学生不能完成. 这一方面反映出学生对这一等式的现实意义或者说现实模型可能还不了解, 另一方面也反映出中学数学教学中代数与几何的脱节. 其实, 对这一等式进行几何表征可以让学生感受到数学的现实意义, 可以联系我国古代的经典名言"一尺之棰, 日取其半, 万世不绝"对学生进行良好数学情感的培养, 还可以进行数列极限概念的铺垫. 比如, 我们可以使用线段对其进行简单的几何表征, 也还可以采用圆、矩形、三角形等其它的图形进行几何表征. 这些几何表征实现了数式信息到几何信息的转化, 为等式提供了一个整体而直观的说明, 解释了等式的直观背景, 使得代数技巧不再是神秘的和孤立的, 有利于促进学生对数学的整体认识[6], 使得学生能认清数学各部分知识之间的联系, 增强学生学习数学的兴趣.

3.3 促进学生良序知识结构的形成

中学数学教材中代数与几何脱节, 这很容易导致学生在数学学习的过程中所获得的知识是片面的、零散的, 缺乏必要的联结, 从而增加学生学习中工作记忆的负担, 不仅降低学习的效率, 而且由于学生所形成的知识结构松散, 还不利于所得知识的巩固和内化. 目前中学生在学习代数内容时对问题的表征主要采用代数形式, 逻辑分析能力和探寻数学问题所含的数量关系能力得到提高, 但是数学直觉思维能力并没有得到较好地发展, 甚至有所倒退. 另一方面, 中学生在学习几何内容时对问题的表征主要采用几何形式, 数学直觉能力得到发展, 但是逻辑分析能力又停滞不前. 在中学数学问题解决教学中进行代数表征和几何表征相结合的指导, 则可以让学生通过对不同的表征形式的思考, 搞清楚数学问题所蕴涵的与代数相关的知识和方法, 明晰数学问题产生的直觉背景, 理清相应的代数表征和几何表征之间是什么关系且相关到什么程度, 进而能用自己的语言说明和描述这些关系, 从而获得所学代数知识与几何知识的有机联结. 通过这种联结, 学生可以形成相应知识的关联图式, 对所学知识进行分析、归纳、梳理和整合, 形成良序的知识结构, 提高对知识的记忆水平和应用能力, 提升数学学习的效率.

3.4 促进学生解决数学问题的策略多样化和能力提高

代数表征与几何表征相结合还有利于学生解决数学问题的策略多样化和能力提高. 不同的表征形式一般可以引出不同的问题解决策略. 代数表征与几何表征相结合可以让学生通过对问题的代数分析与几何描绘, 获得知识的内在联系, 了解问题的本质含义, 对多种问题的表征形式进行聚类分析, 选取最合理的表征, 从而在多种可以选择的解决问题策略中选取最佳方案, 增强解决问题的灵活性和有效性. 特别是一些用一种方法表征困难的问题更需要学生能灵活地运用相应的表征形式才能获得问题的解决.

例如求解下述问题: 甲乙两个游泳运动员在长为 90 m 的游泳池的两边同时出发来回游 12 min, 甲的

速度为 3 m/s，乙的速度为 2 m/s. 若不计转向的时间，问他们相遇多少次？

对这一问题，如果直接使用代数表征，难度较大. 然而如果用几何表征作出两人的运动时间-路程示意图(图 1)则可以比较轻松地解决问题.

由图 1 可知，两人 3 min 后同时回到出发点，在这期间两人相遇 5 次，所以在 20 min 内两人共相遇 20 次[7].

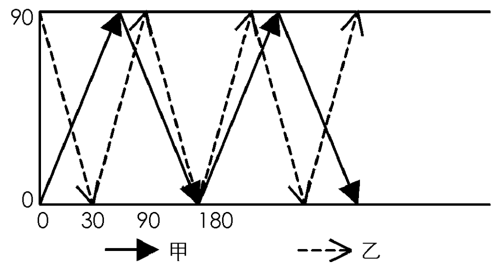

图 1　时间-路程示意图
Fig. 1　Time and Distance Correlational Sketch Map

在对问题进行几何表征并成功地解决之后，由代数表征与几何表征的相关性，学生又可以得到进行代数表征的启示. 由题可知，两人从出发点开始共游 90 m 即相遇，而后是每次两人所游路程之和为 180 m 时再相遇(二人所游路程之和是游泳池单边长的 2 倍)，即除第一次外，两人游 36 s 则相遇，立即可得两人相遇 20 次. 在此基础上，学生如果对此问题的表征与解决进行反思则可以对解决问题的认知过程进行重组，理清思维的脉络，从多种解决问题的策略分析中获得求解类似问题的一般规律，提高自己的数学问题解决能力.

参考文献：

[1]　游旭群. 心理表征对正投影问题解决及轴测投影图再认水平的影响 [J]. 心理科学，1997，20(20)：329－332.
[2]　Anand P G. Vding Computer Instruction to Personalize Arithmeticmaterials for Elementary School Children [J]. Journal of Educational Psychology，1987，79(2)：72－78.
[3]　Anderson J R. Problem Solving and Learning [J]. American Psychology，1993，(48)：35－44.
[4]　傅小兰，何海东. 问题表征过程的一项研究 [J]. 心理学报，1995，(1)：204－210.
[5]　路海东，董　妍. 小学生表征数学应用题策略的实验研究 [J]. 心理发展与教育，2003，(1)：60－63.
[6]　罗增儒. 数式与图形沟通 直觉与逻辑互动 [J]. 中学数学教学参考，2004，(6)：30－32.
[7]　何小亚. 解决数学问题的心理过程分析 [J]. 数学教育学报，2004，13(3)：35.

Algebraic Representation and Geometrical Representation of Middle School Mathematics Problems

YAO Yuan-jin[1]，　ZHANG　Fu[2]，　MENG Shi-cai[3]
1. School of Mathematics and Statistic，Southwest University，Chongqing 400715，China；
2. Dept. of Mathematics，East China Normal University，Shanghai 200062，China；
3. Dept. of Mathematics，Chongqing Teachers' College，Chongqing 400067，China

Abstract：On the basic of the study of representation of problems from the mathematics discipline attribute，the authors defined algebra representation and the geometry representation of mathematical problem in middle school and discussed the significance and function of combining the two kinds of representation to solve mathematical problem by means of concrete teaching-material and math-teaching. At last，the authors conclude that it could strengthen the students' knowing of the question's total information during math-teaching for the strategy of combine the two kinds of representation.

Key words：mathematics problem solving；algebraic representation；geometrical representation

责任编辑　覃吉康